

PH 561 PH

Th.s Toán học - Ks Tin học LÊ HỒNG ĐỨC - Chủ biên
LÊ HỮU TRÍ

PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT GIẢI TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

**SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP
ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ
GIẢI TOÁN**

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
Đ / VL / 3826

NHÀ XUẤT BẢN HÀ NỘI

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ tài liệu:

PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT GIẢI TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

do Thạc sĩ Toán học Lê Hồng Đức chủ biên.

Bộ tài liệu gồm 11 tập:

Cuốn 1: Sử dụng phương pháp lượng giác hoá giải Toán

Cuốn 2: Sử dụng phương pháp vectơ giải Toán

Cuốn 3: Sử dụng các phép biến hình giải Toán

Cuốn 4: Sử dụng phương pháp tọa độ giải Toán

Cuốn 5: Sử dụng phương trình tham số Đường thẳng, Đường tròn, Elíp và Hypebol giải Toán

Cuốn 6: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ giải Toán

Cuốn 7: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ giải Toán

Cuốn 8: Sử dụng phương pháp hàm số và đồ thị giải Toán

Cuốn 9: Sử dụng giới hạn giải Toán

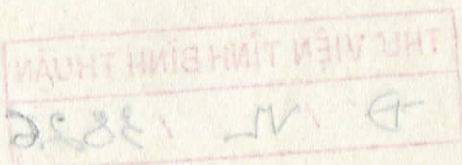
Cuốn 10: Sử dụng đạo hàm giải Toán

Cuốn 11: Sử dụng máy tính giải Toán

Mục tiêu của bộ tài liệu tham khảo này là cung cấp cho các Thầy, Cô giáo một bộ bài giảng chuyên sâu có chất lượng và cho các em học sinh Trung học phổ thông yêu thích môn Toán một bộ tài liệu học tập bổ ích.

Bộ tài liệu được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp đặc biệt để giải Toán.

Bộ tài liệu này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các Thầy, Cô giáo đến các em Học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn Toán Tốt nghiệp PTTH hoặc vào các Trường Đại học.



SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ GIẢI TOÁN

được chia thành 3 chủ đề:

- Chủ đề 1:** Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ giải bài toán về tính chất duy nhất nghiệm
Chủ đề 2: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ giải bài toán về tính chất nghiệm
Chủ đề 3: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ giải bài toán về tính chất tham số

miêu tả chi tiết phương pháp giải cho 9 dạng toán tận dụng được đầy đủ thế mạnh của phương pháp điều kiện cần và đủ.

Tôi cũng xin bày tỏ tại đây lòng biết ơn sâu sắc tới sự giúp đỡ động viên tinh thần của hai người Thầy mà tôi rất mực kính trọng, gồm GS.TS Trần Mạnh Tuấn nguyên Phó Giám đốc Trung Tâm KHTN & CNQG, Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải nguyên Hiệu trưởng Trường PTTH Hà Nội - Amsterdam.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Địa chỉ: Nhóm tác giả Cụ Môn - Nhà sách Toán THPT Cụ Môn
 Số 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội
 Điện thoại: (04) 71966671
 E-mail: cumon@hn.vnn.vn

Hà Nội, ngày 1 tháng 8 năm 2004

LÊ HỒNG ĐỨC

MỤC LỤC**GIỚI THIỆU CHUNG****CHỦ ĐỀ 1****SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ GIẢI BÀI TOÁN VỀ TÍNH CHẤT DUÝ NHẤT NGHIỆM**

- Bài toán 1.** Giải bài toán duy nhất nghiệm cho phương trình, bất phương trình. 10
Bài toán 2. Giải bài toán duy nhất nghiệm cho hệ phương trình, hệ bất phương trình. 33

CHỦ ĐỀ 2**SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ GIẢI BÀI TOÁN VỀ TÍNH CHẤT NGHIỆM**

- Bài toán 1.** Giải bài toán về tính chất các nghiệm cho phương trình. 66
Bài toán 2. Giải bài toán về tập nghiệm 77
Bài toán 3. Giải bài toán về phương trình hệ quả... .. 92
Bài toán 4. Giải bài toán về hai phương trình tương đương... .. 95
Bài toán 5. Sử dụng đồ thị. 126

CHỦ ĐỀ 3**SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ GIẢI BÀI TOÁN VỀ TÍNH CHẤT THAM SỐ**

- Bài toán 1.** Phương trình nghiệm đúng với giá trị xác định của tham số 102
Bài toán 2. Hệ nghiệm đúng với giá trị xác định của tham số 105

TÀI LIỆU THAM KHẢO.....110

CHỦ ĐỀ 1

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ GIẢI BÀI TOÁN VỀ TÍNH DUY NHẤT NGHIỆM

MỞ ĐẦU

Trong chủ đề này sẽ minh họa cách sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ giải bài toán duy nhất nghiệm cho phương trình, bất phương trình, hệ phương trình và hệ bất phương trình được chia thành hai dạng:

- Dạng 1:* Giải bài toán duy nhất nghiệm cho phương trình, bất phương trình chứa tham số.
- Dạng 2:* Giải bài toán duy nhất nghiệm cho hệ phương trình, hệ bất phương trình chứa tham số.

BÀI TOÁN 1

GIẢI BÀI TOÁN DUY NHẤT NGHIỆM CHO PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. PHƯƠNG PHÁP

Với yêu cầu:

"Tìm điều kiện của tham số (giả sử là m) để phương trình, bất phương trình:

$$f(x, m) \geq 0 \text{ (hoặc } f(x, m) \leq 0) \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất"

ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện để các biểu thức trong (1) có nghĩa.

Bước 2: Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm là $x = x_0$, khi đó:

a. Dựa trên tính chất đối xứng của các biểu thức giải tích trong (1), ta đi khẳng định khi đó $x = \varphi(x_0)$ cũng là nghiệm của (1).

b. Do đó, để hệ có nghiệm duy nhất cần có:

$$x_0 = \varphi(x_0) \Rightarrow \text{Giá trị của } x_0. \quad (2)$$

c. Thay (2) vào (1) ta xác định được điều kiện cần cho tham số m để (1) có nghiệm duy nhất, giả sử $m \in D_m$.

Bước 3: Điều kiện đủ: Với $m \in D_m$, ta đi kiểm tra lại tính duy nhất nghiệm cho (1).

Thông thường trong bước này, ta chỉ phải xét các phương trình, bất phương trình cụ thể (thường là không có tham số hoặc nếu có thì đã được đơn giản đi nhiều). Kết quả của bước này cho phép ta loại đi khỏi tập D_m các giá trị không thích hợp của m .

Bước 4: Kết hợp ba bước giải trên ta tìm được đáp số.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Trước tiên chúng ta minh họa các ví dụ sử dụng tính chất hàm chẵn để xác định điều kiện cần, tức là xuất phát từ nhận xét:

- Giả sử phương trình có nghiệm x_0 khẳng định rằng nó cũng sẽ nhận $-x_0$ làm nghiệm
- Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất điều kiện là:
 $-x_0 = x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình:

$$mx^4 - 2(m-1)x^2 + m - 1 = 0. \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm x_0 , suy ra

$$mx_0^4 - 2(m-1)x_0^2 + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(-x_0)^4 - 2(m-1)(-x_0)^2 + m - 1 = 0$$

tức là $-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình.

Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất điều kiện là:

$$-x_0 = x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0.$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, ta có:

$$x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ là nghiệm duy nhất của phương trình.}$$

Vậy, với $m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Chú ý:

1. Yêu cầu trên hoàn toàn có thể được thực hiện bằng phương pháp đặt ẩn phụ, cụ thể:

Đặt $t = x^2$, với $t \geq 0$, phương trình có dạng:

$$f(t) = mt^2 - 2(m-1)t + m - 1 = 0. \quad (2)$$

Trường hợp 1. Với $m = 0$

$$(2) \Leftrightarrow 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Trường hợp 2. Với $m \neq 0$.

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm } t_1 \leq 0 = t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} S \leq 0 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(m-1)}{m} \leq 0 \\ \frac{m-1}{m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất.

2. Như vậy, để tìm điều kiện của tham số sao cho phương trình trùng phương:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất, bằng phương pháp điều kiện cần và đủ được thực hiện theo các bước:

Bước 1: Điều kiện cần:

Giải sử (1) có nghiệm x_0 , suy ra $-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình. Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất điều kiện là:

$$-x_0 = x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0.$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow c = 0.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Bước 2: Điều kiện đủ: Thực hiện việc thử lại với $c = 0$.

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = m. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Nhận xét rằng nếu phương trình có nghiệm x_0 , thì cũng nhận $-x_0$ làm nghiệm.

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 1 + 2 = m \Leftrightarrow m = 3.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 3$, khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = 3.$$

Vì:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} \leq 1 \\ \sqrt[3]{1-x^2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} \leq 3.$$

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} = 1 \\ \sqrt[3]{1-x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = 3$.

Ví dụ 3: Tìm m để bất phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\sqrt{x^2 - 2m} \leq mx^2. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Nhận xét rằng nếu phương trình có nghiệm x_0 , thì cũng nhận $-x_0$ làm nghiệm.

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0.$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{-2m} \leq 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Giả sử $m = 0$, khi đó (1) có dạng:

$$\sqrt{x^2} \leq 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ là nghiệm duy nhất của bất phương trình.}$$

Vậy, với $m = 0$ bất phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 4: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\log_{m^2+1}(2 - \sqrt{x^2+1}) \geq (m-1)^2. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm là $x = x_0$ suy ra $-x_0$ cũng là nghiệm của (1).

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0.$$

Thay $x_0 = 0$ vào (1), ta được:

$$\log_{m^2+1} 1 \geq (m-1)^2 \Leftrightarrow (m-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, khi đó (1) có dạng:

$$\begin{aligned} \log_2(2 - \sqrt{x^2+1}) &\geq 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x^2+1} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 1 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ là nghiệm duy nhất.} \end{aligned}$$

Vậy, với $m = 1$ bất phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 5: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\frac{1}{2^{|x|}} \geq 1 + m^2. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm là $x = x_0$ suy ra $-x_0$ cũng là nghiệm của (1).

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0.$$

Thay $x_0 = 0$ vào (1), ta được:

$$1 \geq 1 + m^2 \Leftrightarrow m^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Giả sử $m = 0$, khi đó (1) có dạng:

$$\frac{1}{2^{|x|}} \geq 1 \Leftrightarrow 2^{|x|} \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với $m = 0$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 6: Tìm m để phương trình:

$$\sqrt{m - \cos x} = \cos 2x. \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm là $x = x_0$, tức là:

$$\sqrt{m - \cos x_0} = \cos 2x_0 \Leftrightarrow \sqrt{m - \cos(-x_0)} = \cos 2(-x_0)$$

$$\Rightarrow -x_0 \text{ cũng là nghiệm của (1).}$$

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0.$$

Thay $x_0 = 0$ vào (1), ta được:

$$\sqrt{m - \cos 0} = \cos 0 \Leftrightarrow \sqrt{m - 1} = 1 \Leftrightarrow m = 2.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Điều kiện đủ: Với $m = 2$, khi đó (1) có dạng:

$$\sqrt{2 - \cos x} = \cos 2x \quad (2)$$

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases} VT = \sqrt{2 - \cos x} \geq 1 \\ VP = \cos 2x \leq 1 \end{cases}$$

Do đó:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} VT = 1 \\ VP = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ 2\cos^2 x - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

là nghiệm duy nhất của phương trình.

Vậy, với $m = 2$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 7: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$x^2 - 2m\cos x + 2 = 0.$$

Giải

Điều kiện cần: Nhận xét rằng nếu phương trình có nghiệm x_0 , thì cũng nhận $-x_0$ làm nghiệm.

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow -2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, khi đó phương trình có dạng:

$$x^2 - 2\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2(\cos x - 1).$$

Vì:

$$\begin{cases} VT = x^2 \geq 0 \\ VP = 2(\cos x - 1) \leq 0 \end{cases} \quad |\cos x| \leq 1$$

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ 2(\cos x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = 1$.

Chú ý: Như vậy, thông qua việc đánh giá tính chẵn của các biểu thức giải tích trong phương trình, bất phương trình chúng ta đã thực hiện được yêu cầu "Tìm điều kiện của tham số để phương trình, bất phương trình có nghiệm duy nhất".

Các ví dụ tiếp theo vẫn với yêu cầu như trên xong để tìm điều kiện cần chúng ta sử dụng các phép biến đổi đại số để thông qua nghiệm x_0 làm xuất hiện nghiệm $\varphi(x_0)$.

Ví dụ 8: Tìm m để phương trình:

$$x^4 + mx^3 + 2mx^2 + mx + 1 = 0. \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất.

Giải

Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm $x_0 \neq 0$, suy ra

$$x_0^4 + mx_0^3 + 2mx_0^2 + mx_0 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + m \frac{1}{x_0} + 2m \frac{1}{x_0^2} + m \frac{1}{x_0^3} + \frac{1}{x_0^4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x_0}\right)^4 + m \left(\frac{1}{x_0}\right)^3 + 2m \left(\frac{1}{x_0}\right)^2 + m \frac{1}{x_0} + 1 = 0$$

tức là $\frac{1}{x_0}$ cũng là nghiệm của phương trình.

Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất điều kiện là:

$$\frac{1}{x_0} = x_0 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1.$$

▪ Với $x_0 = 1$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 1 + m + 2m + m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

▪ Với $x_0 = -1$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 1 - m + 2m - m + 1 = 0, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, $m = -\frac{1}{2}$ là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = -\frac{1}{2}$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x^4 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(2x^2+3x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, $m = -\frac{1}{2}$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Chú ý:

1. Yêu cầu trên hoàn toàn có thể được thực hiện bằng phương pháp đặt ẩn phụ, cụ thể:

Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$x^2 + mx + 2m + m \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + m\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2m = 0.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, điều kiện $|t| \geq 2$.

$$\text{Suy ra } x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

Khi đó phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 + mt + 2m - 2 = 0. \quad (2)$$

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có đúng một nghiệm thỏa mãn $|t| \geq 2$ - *Để nghị bạn đọc tự làm.*

2. Như vậy, để tìm điều kiện của tham số sao cho phương trình hồi quy:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \text{ với } a \neq 0 \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất, bằng phương pháp điều kiện cần và đủ được thực hiện theo các bước:

Bước 1: Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Bước 2: Điều kiện cần:

Giải sử (1) có nghiệm x_0 , suy ra $\frac{1}{x_0}$ cũng là nghiệm của

phương trình. Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất điều kiện là:

$$\frac{1}{x_0} = x_0 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \text{Giá trị tham số.}$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Bước 3: Điều kiện đủ: Thực hiện việc thử lại.

Ví dụ 9: Tìm m để phương trình:

$$|\sin x - m| + |\cos x - m| = \sqrt{2}. \quad (1)$$

có đúng một nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm là $x = x_0$ suy ra

$$|\sin x_0 - m| + |\cos x_0 - m| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |\cos(\frac{\pi}{2} - x_0) - m| + |\sin(\frac{\pi}{2} - x_0) - m| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - x_0 \text{ cũng là nghiệm của (1).}$$

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi

$$x_0 = \frac{\pi}{2} - x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

Đ / VI / 3826

Thay $x_0 = \frac{\pi}{4}$ vào (1), ta được:

$$|\sin \frac{\pi}{4} - m| + |\cos \frac{\pi}{4} - m| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |\frac{\sqrt{2}}{2} - m| + |\frac{\sqrt{2}}{2} - m| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |m - \frac{\sqrt{2}}{2}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=\sqrt{2} \end{cases}$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có đúng 1 nghiệm thuộc khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$.

Điều kiện đủ

▪ Với $m=0$

$$(1) \Leftrightarrow |\sin x| + |\cos x| = \sqrt{2} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

▪ Với $m = \sqrt{2}$

$$(1) \Leftrightarrow |\sin x - \sqrt{2}| + |\cos x - \sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2} \text{ - giải tương tự như trên.}$$

Vậy, với $m=0$ hoặc $m=\sqrt{2}$ phương trình có đúng 1 nghiệm thuộc khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$.

Ví dụ 10: Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$:

$$\sqrt{\lg x - m} + \sqrt{\cot g x - m} = 2. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm là $x = x_0$, tức là:

$$\sqrt{\lg x_0 - m} + \sqrt{\cot g x_0 - m} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\cot g(\frac{\pi}{2} - x_0) - m} + \sqrt{\lg(\frac{\pi}{2} - x_0) - m} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - x_0 \text{ cũng là nghiệm của (1).}$$

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi

$$x_0 = \frac{\pi}{2} - x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Thay $x_0 = \frac{\pi}{4}$ vào (1), ta được:

$$\sqrt{\lg \frac{\pi}{4} - m} + \sqrt{\cot g \frac{\pi}{4} - m} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-m} = 2 \Leftrightarrow m=0.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$.

Điều kiện đủ:

Với $m=0$, khi đó (1) có dạng:

$$\sqrt{\lg x} + \sqrt{\cot g x} = 2 \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$\sqrt{\lg x} + \sqrt{\cot g x} \geq 2\sqrt{\sqrt{\lg x} \cdot \sqrt{\cot g x}} = 2$$

Do đó:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{\lg x} = \sqrt{\cot g x} = 1 \Leftrightarrow \lg x = 1 \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

là nghiệm duy nhất của phương trình.

Vậy, với $m=0$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 11: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} + \sqrt{x} + \sqrt{2-x} = m. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử phương trình (1) có nghiệm là $x = x_0$ suy ra $2 - x_0$ cũng là nghiệm của (1).

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi

$$x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

Thay $x_0 = 1$ vào (1), ta được $m=4$.

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ

Với $m=4$, khi đó (1) có dạng:

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} + \sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 4. \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta được:

$$\sqrt{x} + \sqrt{2-x} \leq 2 \text{ và } \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} \leq 2$$

Do đó:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 2 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} = 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Vậy, với $m = 4$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 12: Tìm a, b, c để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$|x - a| + |x - b| = c. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm là $x = x_0$ suy ra

$$|x_0 - a| + |x_0 - b| = c$$

$$\Leftrightarrow |(a + b - x_0) - a| + |(a + b - x_0) - b| = c$$

$\Rightarrow a + b - x_0$ cũng là nghiệm của (1).

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi

$$x_0 = a + b - x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{a+b}{2}.$$

Thay $x_0 = \frac{a+b}{2}$ vào (1), ta được:

$$c = |a - b|.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ

Giả sử $c = |a - b|$, khi đó (1) có dạng:

$$|x - a| + |x - b| = |a - b| \Leftrightarrow |x - a| + |x - b| = |(x - a) - (x - b)|$$

$$\Leftrightarrow (x - a)(x - b) \leq 0 \quad (2)$$

▪ Nếu $a \neq b$ (ta giả sử khi đó $a < b$), khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow a \leq x \leq b, \text{ tức là (2) không có nghiệm duy nhất.}$$

▪ Nếu $a = b$, khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow (x - a)^2 \leq 0$$

$\Leftrightarrow x = a$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Vậy, với $c = 0$ và $a = b$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Chú ý: Bài toán trên là dạng tổng quát và phương pháp được áp dụng để giải cho một lớp các bài toán gồm 1 và 2 tham số (thông thường các bài thi đại học chỉ gồm một tham số). Các em học sinh cần nắm vững các bước thực hiện để áp dụng trong mỗi bài toán cụ thể.

Ví dụ 13: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$mx(2 - x) = |x - 1|. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm x_0 , ta có:

$$mx_0(2 - x_0) = |x_0 - 1| \Leftrightarrow m[2 - (2 - x_0)](2 - x_0) = |(2 - x_0) - 1|$$

tức là $2 - x_0$ cũng sẽ là nghiệm của phương trình.

Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất điều kiện là

$$2 - x_0 = x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow m = 0.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 0$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow |x - 1| = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ là nghiệm duy nhất của phương trình.}$$

Vậy, với $m = 0$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 14: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\frac{1}{3^{|x-2|}} = 2m - 1.$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có nghiệm là $x = x_0$ suy ra

$$\frac{1}{3^{|x_0-2|}} = 2m - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3^{|(4-x_0)-2|}} = 2m - 1$$

$\Rightarrow 4 - x_0$ cũng là nghiệm của (1).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi

$$x_0 = 4 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 2.$$

Thay $x_0 = 1$ vào phương trình, ta được $m = 1$.

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Giả sử $m = 1$, khi đó phương trình có dạng:

$$\frac{1}{3^{|x-2|}} = 1 \Leftrightarrow 3^{|x-2|} = 1 \Leftrightarrow |x - 2| = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với $m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 15: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$2^{mx(2-x)} = 3^{|x-1|} + m.$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có nghiệm x_0 , ta có:

$$2^{mx_0(2-x_0)} = 3^{|x_0-1|} + m \Leftrightarrow 2^{m(2-x_0)|2-(2-x_0)|} = 3^{|(2-x_0)-1|} + m$$

tức là $2 - x_0$ cũng sẽ là nghiệm của phương trình.

Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất điều kiện là

$$2 - x_0 = x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

Khi đó phương trình có dạng:

$$2^m = m + 1 \Leftrightarrow 2^m + m(1 - 2) = 1 \stackrel{\text{Bernoulli}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ

▪ Với $m = 0$, ta có:

$$1 = 3^{x-1} \Leftrightarrow |x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

▪ Với $m = 1$, ta có:

$$2^{x(2-x)} = 3^{x-1} + 1. \quad (2)$$

Ta có nhận xét sau:

$$x(2-x) = -x^2 + 2x = 1 - (x-1)^2 \leq 1 \Rightarrow VT = 2^{x(2-x)} \leq 2.$$

$$|x-1| \geq 0 \Rightarrow VP = 3^{x-1} + 1 \geq 3^0 + 1 = 2.$$

Vậy phương trình (2) tương đương với:

$$\begin{cases} VT = 1 \\ VP = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x = 1 \\ |x-1| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với $m = 0, m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 16: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$|x - m^2 + 3m| + |x + m| = m^2 - 3m + 2. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm là $x = x_0$ suy ra

$$|x_0 - m^2 + 3m| + |x_0 + m| = m^2 - 3m + 2$$

$$\Leftrightarrow |(m^2 - 4m - x_0) - m^2 + 3m| + |(m^2 - 4m - x_0) + m| = 2$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m - x_0 \text{ cũng là nghiệm của (1).}$$

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi

$$x_0 = m^2 - 4m - x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{m^2 - 4m}{2}.$$

Thay $x_0 = \frac{m^2 - 4m}{2}$ vào (1), ta được:

$$m^2 - 3m + 2 = |m^2 - 2m| \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m \geq 0 \\ m^2 - 3m + 2 = m^2 - 2m \\ m^2 - 2m < 0 \\ m^2 - 3m + 2 = -m^2 + 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ

▪ Với $m = 2$

$$(1) \Leftrightarrow |x + 2| + |x + 2| = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

là nghiệm duy nhất của phương trình.

▪ Với $m = \frac{1}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow |x + \frac{5}{2}| + |x + \frac{1}{2}| = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{chia khoảng}} \text{vô nghiệm.}$$

Vậy, với $m = 2$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 17: Tìm m để phương trình:

$$(x + 1)^4 + (x + 3)^4 = 2m. \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm x_0 , suy ra

$$(x_0 + 1)^4 + (x_0 + 3)^4 = 2m \Leftrightarrow (-x_0 - 1)^4 + (-x_0 - 3)^4 = 2m$$

$$\Leftrightarrow [3 + (-x_0 - 4)]^4 + [1 + (-x_0 - 4)]^4 = 2m$$

tức là $-x_0 - 4$ cũng là nghiệm của phương trình.

Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất điều kiện là:

$$-x_0 - 4 = x_0 \Leftrightarrow x_0 = -2.$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow (-2 + 1)^4 + (-2 + 3)^4 = 2m \Leftrightarrow m = 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (x + 1)^4 + (x + 3)^4 = 2. \quad (2)$$

Đặt $t = x + \frac{1+3}{2} = x + 2$, suy ra:

$$\begin{cases} x + 1 = t - 1 \\ x + 3 = t + 1 \end{cases}$$

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow (t - 1)^4 + (t + 1)^4 = 2 \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2(t^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, $m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Chú ý:

1. Như vậy, để tìm điều kiện của tham số sao cho phương trình:

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c. \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất, bằng phương pháp điều kiện cần và đủ được thực hiện theo các bước:

Bước 1: Điều kiện cần:

Giải sử (1) có nghiệm x_0 , suy ra $-x_0 - a - b$ cũng là nghiệm của phương trình. Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất điều kiện là:

$$-x_0 - a - b = x_0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = -\frac{a+b}{2}$$

⁽¹⁾
 $\Rightarrow$ Giá trị tham số.

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Bước 2: Điều kiện đủ: Thực hiện việc thử lại.

2. Yêu cầu trên hoàn toàn có thể được thực hiện bằng phương pháp đặt ẩn phụ, cụ thể:

Đặt $t = x + \frac{1+3}{2} = x + 2$, suy ra:

$$\begin{cases} x+1 = t-1 \\ x+3 = t+1 \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (t-1)^4 + (t+1)^4 = 2m \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 = 2m \\ &\Leftrightarrow t^4 + 6t^2 + 1 - m = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Đặt $u = t^2$, $u \geq 0$.

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow f(u) = u^2 + 6u + 1 - m = 0. \quad (3)$$

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow (3) \text{ có nghiệm } u_1 \leq 0 = u_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S \leq 0 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 18: Tìm m để phương trình:

$$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5) = m. \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất.

Giải

Điều kiện cần: Giải sử (1) có nghiệm x_0 , suy ra

$$(x_0-1)(x_0+1)(x_0+3)(x_0+5) = m$$

$$\Leftrightarrow (-x_0+1)(-x_0-1)(-x_0-3)(-x_0-5) = m$$

$$\Leftrightarrow [5+(-x_0-4)][3+(-x_0-4)][1+(-x_0-4)][-1+(-x_0-4)] = m$$

tức là $-x_0 - 4$ cũng là nghiệm của phương trình.

Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất điều kiện là:

$$-x_0 - 4 = x_0 \Leftrightarrow x_0 = -2.$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow (-2-1)(-2+1)(-2+3)(-2+5) = m \Leftrightarrow m = 9.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 9$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+3)(x+5) = 9$$

$$\Leftrightarrow (x^2+4x-5)(x^2+4x+3) = 9.$$

Đặt $t = x^2 + 4x - 5$, điều kiện $t \geq -9$, suy ra $x^2 + 4x + 3 = t + 8$.

Khi đó phương trình trên có dạng:

$$t(t+8) = 9 \Leftrightarrow t^2 + 8t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-5=1 \\ x^2+4x-5=-9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-6=0 \\ x^2+4x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \pm \sqrt{10} \\ x=-2 \end{cases}$$

tức là phương trình không có nghiệm duy nhất.

Vậy, không tồn tại m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Chú ý:

1. Như vậy, để tìm điều kiện của tham số sao cho phương trình:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m, \text{ với } a+b=c+d \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất, bằng phương pháp điều kiện cần và đủ được thực hiện theo các bước:

Bước 1: Điều kiện cần: Giải sử (1) có nghiệm x_0 , suy ra $-x_0 - a - b$ cũng là nghiệm của phương trình.

Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất điều kiện là:

$$-x_0 - a - b = x_0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{a+b}{2}$$

⁽¹⁾
 $\Rightarrow$ Giá trị tham số.

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Bước 2: Điều kiện đủ: Thực hiện việc thử lại.

2. Yêu cầu trên hoàn toàn có thể được thực hiện bằng phương pháp đặt ẩn phụ, cụ thể:

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) = m.$$

Đặt $t = x^2 + 4x - 5$, điều kiện $t \geq -9$, suy ra $x^2 + 4x + 3 = t + 8$.

Khi đó phương trình trên có dạng:

$$t(t + 8) = m \Leftrightarrow f(t) = t^2 + 8t - m = 0. \quad (2)$$

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm thỏa mãn } t_1 \leq t_2 = -9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ f(-9) = 0 \\ S/2 \leq -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + m \geq 0 \\ 9 - m = 0 \\ -4 \leq -9 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 19: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = m. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện $0 \leq x \leq 2$.

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm x_0 , khi đó:

$$\sqrt{x_0} + \sqrt{2-x_0} = m \Leftrightarrow \sqrt{2-(2-x_0)} + \sqrt{2-x_0} = m$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x_0} + \sqrt{2-(2-x_0)} = m$$

tức là $2 - x_0$ cũng là nghiệm của (1).

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi

$$2 - x_0 = x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 1 + 1 = m \Leftrightarrow m = 2.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 2$, ta có:

$$\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 2$$

$$\Leftrightarrow 4 = (\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^2 \stackrel{\text{Bunhiacôpxki}}{\leq} (1+1)(x+2-x) = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow x = 1 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, $m = 2$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Chú ý:

1. Như vậy, để tìm điều kiện của tham số sao cho phương trình:

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{b-x} = c. \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất, bằng phương pháp điều kiện cần và đủ được thực hiện theo các bước:

Bước 1: Điều kiện cần:

Giải sử (1) có nghiệm x_0 , suy ra

$$\sqrt{x_0+a} + \sqrt{b-x_0} = c$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{b-(-x_0-a+b)} + \sqrt{a+(-x_0-a+b)} = c$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+(-x_0-a+b)} + \sqrt{b-(-x_0-a+b)} = c$$

tức là $-x_0 - a + b$ cũng là nghiệm của phương trình. Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất điều kiện là:

$$-x_0 - a + b = x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{b-a}{2}$$

⁽¹⁾
 $\Rightarrow$ Giá trị tham số.

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Bước 2: Điều kiện đủ: Thực hiện việc thử lại.

2. Yêu cầu trên hoàn toàn có thể được thực hiện bằng các cách khác, cụ thể:

Cách 1: Phương pháp đặt ẩn phụ:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x+a} \\ v = \sqrt{b-x} \end{cases}, \text{ điều kiện } u, v \geq 0.$$

Khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} u + v = c \\ u^2 + v^2 = a + b \end{cases}$$

đó chính là hệ dx loại I mà chúng ta đã biết cách giải.

Cách 2: Phương pháp hàm số:

Xét hàm số $y = \sqrt{x+a} + \sqrt{b-x}$ trên tập $D = [-a, b]$, từ đó xác định:

- Đạo hàm rồi giải phương trình $y' = 0$.
- Bảng biến thiên.

Khi đó phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi đường thẳng $y = c$ cắt phần đồ thị hàm số trên D tại một điểm duy nhất.

Cách 3: Phương pháp lượng giác hoá.

3. Đề nghị bạn đọc mở rộng cho phương trình:

$$\sqrt[n]{a-f(x)} + \sqrt[n]{b+f(x)} = c.$$

Ví dụ 20: Tìm a để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5}) = a. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm x_0 , khi đó:

$$\log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x_0} + \sqrt{x_0+5}) = a$$

$$\Leftrightarrow \log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{(-1-x_0)+5} + \sqrt{4-(-1-x_0)}) = a$$

Tức là khi đó $-1-x_0$ cũng là nghiệm của (1).

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi

$$x_0 = -1-x_0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{2}.$$

Với $x_0 = -\frac{1}{2}$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \log_{3\sqrt{2}}\left(\sqrt{4+\frac{1}{2}} + \sqrt{-\frac{1}{2}+5}\right) = a \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy $a = 1$ là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $a = 1$, phương trình (1) có dạng:

$$\log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5}) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} = 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \\ 4-x+x+5+2\sqrt{(4-x)(x+5)} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 4 \\ 2\sqrt{(4-x)(x+5)} = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 4 \\ 4(4-x)(x+5) = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 4 \\ 4x^2 + 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Vậy, $a = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Chú ý:

1. Trong phần xác định điều kiện cần ta có thể sử dụng:

- Bất đẳng thức Bunhiacôpski như sau:

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} \leq \sqrt{(1+1)(4-x+x+5)} = 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5}) \leq 1.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\frac{\sqrt{4-x}}{1} = \frac{\sqrt{x+5}}{1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

- Bất đẳng thức Côsi như sau:

$$\begin{aligned} (\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5})^2 &= 4-x+x+5+2\sqrt{(4-x)(x+5)} \\ &\leq 9+(4-x)+(x+5) = 18 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} \leq 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5}) \leq 1.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\sqrt{4-x} = \sqrt{x+5} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

2. Bài toán trên còn có thể được giải bằng phương pháp hàm số, như sau:

Viết lại (1) dưới dạng:

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} = \log_{3\sqrt{2}} a \text{ với } a > 0 \quad (2)$$

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = \log_{3\sqrt{2}} a$ cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{x+5}$ tại đúng một điểm.

Xét hàm số $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{x+5}$.

- Miền xác định $D = [-5, 4]$.
- Đạo hàm:

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+5}},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2\sqrt{4-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+5}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+5} = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

▪ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-5	-1/2	4	$+\infty$
t'			+	0	-
t		3	$3\sqrt{2}$	3	

Từ đó điều kiện là $a = 1$.

Ví dụ 21: Tìm a, b để phương trình:

$$|2\sin x - 1| + |2\sin x - a| = b \quad (1)$$

có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc $[0, 2\pi)$.

Giải

Đặt $t = 2\sin x$, điều kiện $|t| \leq 2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$|t - 1| + |t - a| = b \quad (2)$$

Khi đó (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc $[0, 2\pi)$

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm duy nhất thuộc $[-2, 2]$.

Điều kiện cần

Giả sử (1) có nghiệm là $t = t_0$ suy ra

$$|t_0 - 1| + |t_0 - a| = b$$

$$\Leftrightarrow |1 + a - t_0| - a + |1 + a - t_0| - 1 = b$$

$$\Rightarrow 1 + a - t_0 \text{ cũng là nghiệm của (2).}$$

Vậy (2) có nghiệm duy nhất khi

$$t_0 = 1 + a - t_0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{a+1}{2}$$

Thay $t_0 = \frac{a+1}{2}$ vào (2), ta được:

$$\left| \frac{a+1}{2} - 1 \right| + \left| \frac{a+1}{2} - a \right| = b \Leftrightarrow |a - 1| = b$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ:

Với $b = |a - 1|$, khi đó (2) có dạng:

$$|t - 1| + |t - a| = |a - 1|$$

$$\Leftrightarrow |t - 1| + |t - a| = |(t - 1) - (t - a)|$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(t - a) \leq 0 \quad (3)$$

• Nếu $a \neq 1$ (ta giả sử khi đó $a < 1$), khi đó:

(3) $\Leftrightarrow a \leq t \leq 1$, tức là (3) không có nghiệm duy nhất.

• Nếu $a = 1$, khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow (t - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2\sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \quad x \in (0, 2\pi) \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Vậy, với $b = 0$ và $a = 1$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc $[0, 2\pi)$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm m để các phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a. $mx^4 + (m + 3)x^2 + m^2 - m = 0$.

b. $(m - 2)x^4 - 2mx^3 - (m - 5)x^2 + 2mx + m - 2 = 0$.

c. $(x + 2)^4 + (x + 6)^4 = m^2 - 2$.

d. $x(x - 2)(x + 2)(x + 4) = 2m$.

Bài tập 2: Tìm m để các bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a. $\frac{1}{3^{|x-2|}} \geq 1 + m^2$.

b. $2^{|x-1|} \leq 1 + m^2$.

Bài tập 3: Tìm m để các bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a. $\log_m(x^2 + 2) \leq \log_2 m$.

b. $\log_{|x|+2}(|x| + 1) + \log_2(1 + m^2) \leq 0$.

Bài tập 4: Tìm m để các phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a. $x(4 - x) + m = |x - 2|$.

b. $|x + m^2| + |x + 1| = |m + 1|$.

c. $mx^2 - 2(m - 1)x + 2 = |mx - 2|$.

Bài tập 5: Tìm m để các phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt[3]{1+x^2} = m$.

b. $\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = m$.

c. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt[5]{8-x^2} = m$.

d. $\sqrt{4-x} + \sqrt{x+2} = m$.

e. $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} = m$.

f. $\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = m$.

g. $\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1} = m(\sqrt[4]{3-x} + \sqrt[4]{x+1})$.

Bài tập 6: Tìm m để các phương trình sau có nghiệm duy nhất:

- $x^2 - 2m \sin^2 x + 4 = 0.$
- $x^2 - m \sin(\cos x) + m^2 = 0.$
- $x^2 - m \lg(\cos x) + m^2 = 0.$

Bài tập 7: Tìm a, b, để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\sqrt[3]{(ax+b)^2} + \sqrt[3]{(ax-b)^2} + \sqrt[3]{(a^2x^2-b^2)} = \sqrt[3]{b}.$$

BÀI TOÁN 2

GIẢI BÀI TOÁN DUY NHẤT NGHIỆM CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. PHƯƠNG PHÁP

Với yêu cầu:

"Tìm điều kiện của tham số (giả sử là m) để hệ phương trình, hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} f(x, y, m) \leq 0 \\ g(x, y, m) \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất"

ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện để các biểu thức trong (1) có nghĩa.

Bước 2: Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm là (x_0, y_0) khi đó:

- Dựa trên tính chất đối xứng của các biểu thức giải tích trong (1), ta đi khẳng định khi đó $(\varphi_1(x_0, y_0), \varphi_2(x_0, y_0))$ cũng là nghiệm của (1).

- Do đó, để hệ có nghiệm duy nhất cần có:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_0, y_0) = x_0 \\ \varphi_2(x_0, y_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \text{Giá trị của } (x_0, y_0). \quad (2)$$

- Thay (2) vào (1) ta xác định được điều kiện cần cho tham số m để (1) có nghiệm duy nhất, giả sử $m \in D_m$. Ở bước này cần sử dụng kiến thức về điều kiện có nghiệm duy nhất cho phương trình hoặc bất phương trình.

Bước 3: Điều kiện đủ: Với $m \in D_m$, ta đi kiểm tra lại tính duy nhất nghiệm cho (1).

Thông thường trong bước này, ta chỉ phải xét các hệ phương trình, hệ bất phương trình cụ thể (thường là không có tham số hoặc nếu có thì đã được đơn giản đi nhiều). Kết quả của bước này cho phép ta loại đi khỏi tập D_m các giá trị không thích hợp của m.

Bước 4: Kết hợp ba bước giải trên ta tìm được đáp số.

Chú ý: Với các hệ một ẩn bài toán được thực hiện dựa trên phương pháp đã biết trong bài toán 1.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất, xác định nghiệm đó.

Giải

Điều kiện cần:

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$x_0 = y_0. \quad (*)$$

Khi đó, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x_0^2 = m \\ 2x_0 = 6 \end{cases} \Rightarrow m = 18.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ:

Với $m = 18$, ta được:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với $m = 18$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Chú ý:

1. Như vậy, để tìm điều kiện của tham số sao cho hệ phương trình đối xứng loại I và loại II có nghiệm duy nhất ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Điều kiện cần

- Nhận xét rằng, nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$x_0 = y_0. \quad (**)$$

- Thay $(**)$ vào hệ ta được giá trị của tham số. Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Bước 2: Điều kiện đủ.

2. Yêu cầu trên hoàn toàn có thể được thực hiện bằng những phương pháp khác, cụ thể:

Cách 1: Sử dụng phương pháp chung của hệ đối xứng loại I.

Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = m \\ x+y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 6 \\ xy = \frac{36-m}{2} \end{cases}$$

khi đó, x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 6t + \frac{36-m}{2} = 0. \quad (1)$$

Hệ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow (1) \text{ có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow \Delta'_{(1)} = 0 \Leftrightarrow m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = 18.$$

Khi đó hệ có nghiệm $x = y = 3$.

Vậy, với $m = 18$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Cách 2: Sử dụng phương pháp thế.

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} x^2 + (6-x)^2 = m \\ y = 6-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 12x + 36 - m = 0 \\ y = 6-x \end{cases} \quad (2) \quad (I)$$

Hệ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta'_{(2)} = 0 \Leftrightarrow m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = 18.$$

Khi đó hệ có nghiệm $x = y = 3$.

Vậy, với $m = 18$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Cách 3: Sử dụng phương pháp đồ thị.

Nhận xét rằng với $m \leq 0$, hệ vô nghiệm, do đó ta xét với $m > 0$.

Ta có:

- Phương trình (1) là đường tròn (C) có tâm $O(0, 0)$, bán kính $R = \sqrt{m}$.
- Phương trình (2) là đường thẳng (d).

Hệ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (d) tiếp xúc với (C)

$$\Leftrightarrow d(O, (d)) = R \Leftrightarrow \frac{|-6|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{m} \Leftrightarrow m = 18.$$

Khi đó, hệ có nghiệm $x = y = 3$.

Vậy, với $m = 18$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Cách 4: Sử dụng phương pháp lượng giác hoá.

Nhận xét rằng với $m \leq 0$, hệ vô nghiệm, do đó ta xét với $m > 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{m}}\right)^2 = 1$$

đặt:

$$\begin{cases} x = \sqrt{m} \sin t \\ y = \sqrt{m} \cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi). \quad (3)$$

Thay (3) vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$\begin{aligned} \sqrt{m} \sin t + \sqrt{m} \cos t &= 6 \Leftrightarrow \sqrt{2m} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 6 \\ \Leftrightarrow \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{m}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Hệ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình (4) có nghiệm duy nhất trên tập $[0, 2\pi)$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{m}} \right| = 1 \Leftrightarrow m = 18.$$

Khi đó hệ có nghiệm $x = y = 3$.

Vậy, với $m = 18$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \log_2(x+y) = m \log_2(xy) \\ \log_2(xy) = 6 - xy \end{cases}$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x+y > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x, y > 0.$$

Điều kiện cần:

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm (y_0, x_0) , do đó hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$.

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} \log_2(x_0 + x_0) = m \log_2 x_0^2 \\ \log_2 x_0^2 = 6 - x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 4 = m \log_2 4 \\ x_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, ta được:

$$\begin{cases} \log_2(x+y) = \log_2(xy) \\ \log_2(xy) = 6 - xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = xy \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 4 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2.$$

Vậy, với $m = 1$ hệ có nghiệm duy nhất $(2, 2)$.

Ví dụ 3: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + xy + y = m + 2 \\ x^2y + xy^2 = m + 1 \end{cases} \quad (I)$$

Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất.

Giải

Điều kiện cần: Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$x_0 = y_0. \quad (*)$$

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + 2x_0 = m + 2 \\ 2x_0^3 = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2x_0^3 - 1 \\ 2x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \\ m = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ

▪ Với $m = 1$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} xy + (x+y) = 3 \\ xy(x+y) = 2 \end{cases}$$

khi đó $x + y$ và xy là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ xy = 2 \end{cases} \text{ (vn)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

là nghiệm duy nhất của hệ.

▪ Với $m = -1$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} xy + (x+y) = 1 \\ xy(x+y) = 0 \end{cases}$$

Nhận thấy hệ luôn có hai cặp nghiệm $(0, 1)$ và $(1, 0)$.

▪ Với $m = -\frac{3}{4}$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} xy + (x+y) = \frac{5}{4} \\ xy(x+y) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

khi đó $x+y$ và xy là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - \frac{5}{4}t + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \\ x+y=\frac{1}{4} \text{ (vn)} \\ xy=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$$

là nghiệm duy nhất của hệ.

Vậy, với $m = 1$ hoặc $m = -\frac{3}{4}$ hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Chú ý: Như đã thấy trong ví dụ trên, chúng ta có thể thực hiện bằng cách sau:

Đặt:

$$\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}, \text{ điều kiện } S^2 - 4P \geq 0.$$

Viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} (x+y)+xy=m+2 \\ (x+y).xy=m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S+P=m+2 \\ S.P=m+1 \end{cases}$$

khi đó S, P là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - (m+2)t + m+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=m+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=m+1 \end{cases} \Leftrightarrow x, y \text{ là nghiệm của } f(u)=u^2-u+m+1=0. \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=m+1 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x, y \text{ là nghiệm của } g(u)=u^2-(m+1)u+1=0. \quad (2)$$

Hệ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \text{ vô nghiệm \& (2) có nghiệm kép} \\ (2) \text{ vô nghiệm \& (1) có nghiệm kép} \\ (1) \& (2) \text{ có nghiệm kép } u_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_f < 0 \\ \Delta_g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g < 0 \\ \Delta_f = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g = \Delta_f = 0 \\ \frac{1}{2} = \frac{m+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m-3 < 0 \\ m^2+2m-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3 < 0 \\ -4m-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy, với $m = 1$ hoặc $m = -\frac{3}{4}$ hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 4: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ \log_2 x + \log_2 y = m \end{cases}$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Điều kiện cần: Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm (y_0, x_0) , do đó hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$.

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} x_0^2 + x_0^2 = 17 \\ \log_2 x_0 + \log_2 x_0 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \sqrt{\frac{17}{2}} \\ 2 \log_2 \sqrt{\frac{17}{2}} = m \end{cases} \Rightarrow m = \log_2 \frac{17}{2}.$$

Điều kiện đủ: Với $m = \log_2 \frac{17}{2}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 \frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 17 \\ xy = \frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \sqrt{34} \\ xy = \frac{17}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = \sqrt{\frac{17}{2}}.$$

Vậy, với $m = \log_2 \frac{17}{2}$ hệ có nghiệm duy nhất.

Chú ý: Ví dụ trên, chúng ta có thể thực hiện bằng cách sau:

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ \log_2(x \cdot y) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x \cdot y = 2^m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 17 \\ x \cdot y = 2^m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x + y = \sqrt{17 + 2^{m+1}} \\ x \cdot y = 2^m \end{cases}$$

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - t\sqrt{17 + 2^{m+1}} + 2^m = 0. \quad (1)$$

Hệ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} = 0 \\ -\frac{b}{2a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17 + 2^{m+1} - 4 \cdot 2^m = 0 \\ \frac{\sqrt{17 + 2^{m+1}}}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2^{m+1} = 17$$

$$\Leftrightarrow m = \log_2 \frac{17}{2}.$$

Vậy, với $m = \log_2 \frac{17}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 5: Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x + y \leq m \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Điều kiện $x, y \geq 0$.

Điều kiện cần:

Giả sử hệ có nghiệm $(x_0, y_0) \Rightarrow (y_0, x_0)$ cũng là nghiệm của hệ. Vậy hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là: $x_0 = y_0$.

Khi đó hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} = 1 \\ 2x \leq m \end{cases} \Rightarrow m \geq \frac{1}{2}.$$

Vậy $m \geq \frac{1}{2}$ là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ:

Với $m \geq \frac{1}{2}$, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m = \frac{1}{2}$, hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x + y \leq \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \begin{cases} \sqrt{y} = 1-t \\ t^2 + (1-t)^2 \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ 4t^2 - 4t + 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{4} \text{ là nghiệm duy nhất của hệ}$$

Trường hợp 2: Với $m > \frac{1}{2}$, hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x + y \leq m \end{cases} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \begin{cases} \sqrt{y} = 1-t \\ t^2 + (1-t)^2 \leq m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ 2t^2 - 2t + 1 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1 - \sqrt{2m-1}}{2} \leq t \leq \frac{1 + \sqrt{2m-1}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \max\left\{\frac{1 - \sqrt{2m-1}}{2}, 0\right\} \leq t \leq 1 \Leftrightarrow \left\{\sqrt{\max\left\{\frac{1 - \sqrt{2m-1}}{2}, 0\right\}} \leq y \leq 1\right.$$

$\Rightarrow$ có vô số giá trị y thoả mãn $\Rightarrow$ hệ không có nghiệm duy nhất.

Vậy, $m = \frac{1}{2}$ là điều kiện cần và đủ để hệ có nghiệm duy nhất.

Chú ý: Ví dụ trên, chúng ta có thể thực hiện bằng các cách sau:

Trước hết, đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ v = \sqrt{y} \end{cases}, u, v \geq 0.$$

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} u + v = 1 & (I) \\ u^2 + v^2 \leq m & (II) \end{cases}$$

Cách 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương:

$$\begin{cases} v = 1 - u \\ u^2 + (1-u)^2 \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ f(u) = 2u^2 - 2u + 1 - m \leq 0 \end{cases} \quad (III)$$

Vậy (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (III) có nghiệm duy nhất.

Xét (3), ta có:

$$\Delta = 2m - 1.$$

Trước hết cần có

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 2m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}.$$

Khi đó tập nghiệm của (1) là:

$$\frac{1 - \sqrt{2m-1}}{2} \leq u \leq \frac{1 + \sqrt{2m-1}}{2}$$

Khi đó (II) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{2m-1}}{2} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Vậy, với $m = \frac{1}{2}$ hệ có nghiệm duy nhất.

Cách 2: Sử dụng phương pháp đồ thị

Trường hợp 1: Với $m \leq 0$ thì (III) có vô số nghiệm.

Trường hợp 2: Với $m > 0$

Gọi X_1 và X_2 lần lượt là tập nghiệm của (1) và (2), ta có:

- X_1 là tập các điểm trong đoạn thẳng AB của đường thẳng (d): $u + v - 1 = 0$
- X_2 là tập các điểm trong hình tròn (C) có:

$$\begin{cases} \text{Tam O} \\ \text{B kính } R = \sqrt{m} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi (d) tiếp xúc với (C) tại điểm $I \in AB$

$$\Leftrightarrow d(I, (d)) = R \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{m} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Vậy, với $m = \frac{1}{2}$ hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 6: Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{2xy + m} \geq 1 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử hệ có nghiệm $(x_0, y_0) \Rightarrow (y_0, x_0)$ cũng là nghiệm của hệ. Vậy hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là: $x_0 = y_0$.

Khi đó hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} 2x_0 \leq 1 \\ 2(x_0 - 1)^2 \leq m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2(x_0 - 1)^2 - 1 \\ x_0 - 1 \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2(x_0 - 1)^2 - 1 \\ (x_0 - 1)^2 \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \geq -\frac{1}{2}$$

Vậy $m \geq -\frac{1}{2}$ là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m \geq -\frac{1}{2}$, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m = -\frac{1}{2}$, hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} x + y \leq 1 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (II)$$

Hệ (II) có nghiệm duy nhất $x = y = \frac{1}{2}$, vì khi đó đường thẳng

(d): $x + y - 1 = 0$ tiếp xúc với đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{2}$

tại điểm $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Trường hợp 2: Với $m > -\frac{1}{2}$, hệ (I) có vô số nghiệm, thật vậy với

$x = \frac{1}{2}$, ta được:

$$\begin{cases} y \leq \frac{1}{2} \\ (y - 1)^2 \leq m + \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{1}{2} \\ 1 - \sqrt{m + \frac{3}{4}} \leq y \leq 1 + \sqrt{m + \frac{3}{4}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{m + \frac{3}{4}} \leq y \leq \frac{1}{2}$$

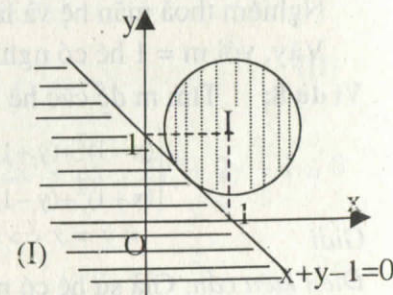
$\Rightarrow$ có vô số giá trị y thỏa mãn $\Rightarrow$ hệ không có nghiệm duy nhất.

Vậy, $m = -\frac{1}{2}$ là điều kiện cần và đủ để hệ có nghiệm duy nhất.

Chú ý: Có thể sử dụng phương pháp đồ thị để giải ví dụ trên bằng việc biến đổi tương đương hệ về dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{2xy + m} \geq 1 - (x + y) \\ x + y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 1 \\ 2xy + m \geq [1 - (x + y)]^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 1 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq m + 1 \end{cases} \quad (2)$$



Gọi X_1 và X_2 lần lượt là tập nghiệm của (1) và (2). Ta có:

- X_1 là tập các điểm trong phần mặt phẳng phía dưới đường thẳng (d): $x + y - 1 = 0$

- X_2 là tập các điểm trong hình tròn (C) có:

$$\begin{cases} \text{Tam I(1,1)} \\ \text{B kính } R = \sqrt{m+1} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi (d) tiếp xúc với (C)

$$\Leftrightarrow d(I, (d)) = R \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{m+1} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Vậy, với $m = -\frac{1}{2}$ hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 7: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x = y^2 - y + m \quad (*) \\ y = x^2 - x + m \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần: Nhận xét rằng, nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm (y_0, x_0) , do đó hệ có nghiệm duy nhất thì

$$x_0 = y_0.$$

Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow x_0 = x_0^2 - x_0 + m \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + m = 0. \quad (3)$$

Do x_0 duy nhất nên phương trình (3) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta'_{(3)} = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y^2 - y + 1 \\ y = x^2 - x + 1 \end{cases} \xrightarrow{+} x + y = y^2 - y + 1 + x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Nghiệm thỏa mãn hệ và là nghiệm duy nhất.

Vậy, với $m = 1$ hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 8: Tìm m để các hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq m \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq m \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử hệ có nghiệm (x_0, y_0) , suy ra (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ. Vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x_0 = y_0$.

Khi đó:

$$(x_0 - 1)^2 + (x_0 + 1)^2 \leq m \Leftrightarrow 2x_0^2 + 2 - m \leq 0 \quad (*)$$

Ta cần (*) phải có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy, điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $m = 2$.

Điều kiện đủ: Với $m = 2$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \end{cases} \quad (II)$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Nhận xét rằng $x = y = 0$ thỏa mãn hệ (II).

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất khi $m = 2$.

Ví dụ 9: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq m \\ (x+1)^2 + y^2 \leq m \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần:

Giả sử hệ có nghiệm (x_0, y_0) , suy ra (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ. Vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x_0 = y_0$.

Khi đó:

$$x_0^2 + (x_0 + 1)^2 \leq m \Leftrightarrow 2x_0^2 + 2x_0 - m + 1 \leq 0 \quad (1)$$

Ta cần (1) phải có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $m = \frac{1}{2}$.

Điều kiện đủ: Với $m = \frac{1}{2}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq \frac{1}{2} \\ (x+1)^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (II)$$

$$\Rightarrow x^2 + (y+1)^2 + (x+1)^2 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 2y^2 + 2y + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (y\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = y = -\frac{1}{2}.$$

Nhận xét rằng $x = y = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn hệ (II).

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất khi $m = \frac{1}{2}$.

Chú ý: Ta có thể sử dụng phương pháp đồ thị để thực hiện ví dụ trên, cụ thể:

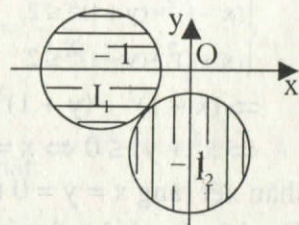
Gọi X_1 và X_2 lần lượt là tập nghiệm của (1) và (2). Ta có:

- X_1 là tập các điểm trong hình tròn:

$$(C_1): \begin{cases} \text{Tam } I_1(0, -1) \\ \text{B kính } R_1 = \sqrt{m} \end{cases}$$

- X_2 là tập các điểm trong hình tròn:

$$(C_2): \begin{cases} \text{Tam } I_2(-1, 0) \\ \text{B kính } R_2 = \sqrt{m} \end{cases}$$



Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi (C_1) tiếp xúc với (C_2)

$$\Leftrightarrow I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow I_1I_2 = 2\sqrt{m} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Vậy, với $m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 10: Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} xy + x^2 = m(y-1) \\ xy + y^2 = m(x-1) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần:

Nhận xét rằng: nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm (y_0, x_0) , do đó hệ có nghiệm duy nhất thì

$$x_0 = y_0.$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 2x_0^2 - mx_0 + m = 0. \quad (3)$$

Do x_0 duy nhất nên phương trình (3) có nghiệm duy nhất

$$\Delta'_{(3)} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 8 \end{cases}$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ

- Với $m = 0$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} xy + x^2 = 0 \\ xy + y^2 = 0 \end{cases}$$

Ta thấy hệ có vô số nghiệm thỏa mãn $y = -x \Rightarrow$ loại.

- Với $m = 8$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} xy + x^2 = 8(y-1) \\ xy + y^2 = 8(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = 8(y-1) \\ x = y \\ y = -8 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 - 8x + 8 = 0 \\ y = -8 - x \\ 72 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 2 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với $m = 8$ hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 11: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^3 = y^2 + 7x^2 - mx & (1) \\ y^3 = x^2 + 7y^2 - my & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần: Nhận xét rằng: nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm (y_0, x_0) , do đó hệ có nghiệm duy nhất thì

$$x_0 = y_0.$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow x_0^3 = x_0^2 + 7x_0^2 - mx_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0^2 - 8x_0 + m = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Do x_0 là nghiệm duy nhất, nên

$$\begin{cases} (3) \text{ vô nghiệm} \\ (3) \text{ nghiệm kép bằng } 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(3)} < 0 \\ \Delta'_{(3)} = 0 \Leftrightarrow 16 - m < 0 \Leftrightarrow m > 16. \\ 4 = 0 \end{cases}$$

Điều kiện đủ:

Với $m > 16$, ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y^2 + 7x^2 - mx \\ (x-y)[x^2 + (y-6)x + (y^2 - 6y + m)] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y^2 + 7x^2 - mx \\ x = y \end{cases} \quad (II)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y^2 + 7x^2 - mx \\ x^2 + (y-6)x + (y^2 - 6y + m) = 0 \end{cases} \quad (III) \quad (*)$$

- Giải (II)**

$$\begin{cases} x = y \\ x(x^2 - 8x + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 0 \\ x^2 - 8x + m = 0 \quad (**) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y \\ x^2 - 8x + m = 0 \quad (**) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0$$

bởi phương trình (**) vô nghiệm do:

$$\Delta = 16 - m < 0, \text{ với } \forall m > 16$$

▪ Giải (III)

Coi (*) là phương trình bậc 2 theo x, ta có:

$$\begin{aligned} \Delta &= (y-6)^2 - 4(y^2 - 6y + m) \\ &= -3(y-2)^2 - 4(m-12) < 0, \forall m > 16 \end{aligned}$$

Do đó (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (II) vô nghiệm.

Vậy, với $m > 16$ hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 0$.

Ví dụ 12: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x(4y^2 - 3) = m \\ y(4x^2 - 3) = m \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Điều kiện cần:

Nhận xét rằng: nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm (y_0, x_0) , do đó hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow x_0(4x_0^2 - 3) = m \Leftrightarrow 4x_0^3 - 3x_0 = m. \quad (1)$$

Do x_0 duy nhất nên (1) phải có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow |m| > 1$.

Điều kiện đủ:

Với $|m| > 1$, ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x(4y^2 - 3) = m \\ (x-y)(4xy+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(4y^2 - 3) = m \\ x = y \end{cases} \quad (II)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(4y^2 - 3) = m \\ 4xy + 3 = 0 \end{cases} \quad (III)$$

▪ Giải (II)

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 4x^3 - 3x = m \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}} \right).$$

▪ Giải (III)

$$(III) \Leftrightarrow \begin{cases} 4xy^2 - 3x = m \\ 4xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y - 3x = m \\ 4xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -\frac{m}{3} \\ xy = -\frac{3}{4} \end{cases} \quad (IV)$$

Nhận xét rằng (IV) luôn có 2 nghiệm phân biệt, do vậy hệ (I) không thể có nghiệm duy nhất.

Vậy, không tồn tại m để hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 13: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = m & (1) \\ x^2 + (y-2)^2 = m & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử hệ có nghiệm (x_0, y_0) , suy ra (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ. Vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là

$$x_0 = y_0.$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 + x_0^2 = m \Leftrightarrow 2x_0^2 - 4x_0 + 4 - m = 0. \quad (3)$$

Do x_0 duy nhất, nên phương trình (3) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta'_{(3)} = 0 \Leftrightarrow 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 2$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + (y-2)^2 = 2 \end{cases} \quad (II)$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 + x^2 + (y-2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = 1.$$

Nhận xét rằng $x = y = 1$ thỏa mãn hệ (II).

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất khi $m = 2$.

Chú ý: Chúng ta có thể sử dụng phương pháp đồ thị để thực hiện ví dụ trên, cụ thể:

Gọi X_1 và X_2 lần lượt là tập nghiệm của (1) và (2).

Ta có:

▪ X_1 là tập các điểm trên đường tròn (C_1) có:

$$\begin{cases} \text{Tam } I_1(2,0) \\ \text{Bkinh } R_1 = \sqrt{m} \end{cases}$$

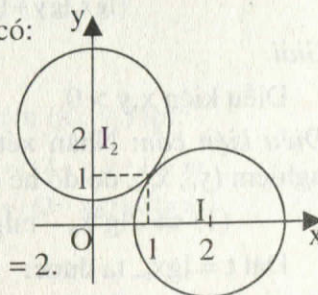
▪ X_2 là tập các điểm trên đường tròn (C_2) có:

$$\begin{cases} \text{Tam } I_2(0,2) \\ \text{Bkinh } R_2 = \sqrt{m} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2)

$$\Leftrightarrow I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} = 2\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất khi $m = 2$.



Ví dụ 14: Tìm a để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} \leq a \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x} \leq a \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x, y \geq 0$.

Điều kiện cần:

Giả sử hệ có nghiệm $(x_0, y_0) \Rightarrow x_0, y_0 \geq 0$ từ đó:

$$\begin{cases} \sqrt{x_0+1} + \sqrt{y_0} \geq 1 \\ \sqrt{y_0+1} + \sqrt{x_0} \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{nếu } a < 1 \text{ thì hệ vô nghiệm.}$$

Vậy $a \geq 1$ là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Xét hai trường hợp:

Với $a = 1$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} \leq 1 \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ là nghiệm duy nhất của hệ.}$$

Với $a > 1$, xét các cặp nghiệm của hệ có $x = 0$ hệ có dạng:

Biến đổi bất phương trình (1) về dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{y} \leq a-1 \\ \sqrt{y+1} \leq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq (a-1)^2 \\ y \leq a^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \min\{(a-1)^2, a^2-1\}.$$

$\Rightarrow$ có vô số giá trị y thỏa mãn $\Rightarrow$ hệ không có nghiệm duy nhất.

Vậy, với $a = 1$ hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 0$.

Chú ý: Với cách lập luận tương tự như trên ta có thể giải được bài toán với yêu cầu:

"Tìm a để hệ bất phương trình sau có nghiệm"

Khi đó điều kiện là $a \geq 1$.

Ví dụ 15: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \lg x \cdot \lg y + \lg^2 x = m(\lg y - 1) \\ \lg x \cdot \lg y + \lg^2 y = m(\lg x - 1) \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Điều kiện $x, y > 0$.

Điều kiện cần: Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm (y_0, x_0) , do đó hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 2\lg^2 x_0 - m\lg x_0 + m = 0. \quad (2)$$

Đặt $t = \lg x_0$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 2t^2 - mt + m = 0. \quad (3)$$

Do x_0 duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta'_{(3)} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 8 \end{cases}.$$

Điều kiện đủ

- Với $m = 0$, từ (2) ta thấy

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x \cdot \lg y + \lg^2 x = 0 \\ \lg x \cdot \lg y + \lg^2 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lg x(\lg y + \lg x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{y} \end{cases}.$$

hệ có vô số nghiệm $\Rightarrow m = 0$ loại.

- Với $m = 8$, nhận thấy

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x \cdot \lg y + \lg^2 x = 8(\lg y - 1) \\ \lg x \cdot \lg y + \lg^2 y = 8(\lg x - 1) \end{cases}$$

Trừ từng vế hệ phương trình, ta được:

$$\lg^2 x - \lg^2 y = -8(\lg x - \lg y)$$

$$\Leftrightarrow (\lg x - \lg y)(\lg x + \lg y + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = \lg y \\ \lg y = -8 - \lg x \end{cases}$$

Khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \lg x = \lg y \\ 2\lg^2 x - 8\lg x + 8 = 0 \\ \lg x = -8 - \lg y \\ 72 = 0 \text{ (vn)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \lg x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 100$$

Vậy, với $m = 8$ hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 16: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} |x+1| + |y-3| = m \\ |y+1| + |x-3| = m \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần: Nhận xét rằng, nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì:

$$\begin{cases} |x_0+1| + |y_0-3| = m \\ |y_0+1| + |x_0-3| = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |(2-x_0)-3| + |(2-y_0)+1| = m \\ |(2-y_0)-3| + |(2-x_0)+1| = m \end{cases},$$

tức là hệ cũng có nghiệm $(2-x_0, 2-y_0)$

Mặt khác hệ cũng có nghiệm (y_0, x_0) .

Do đó hệ có nghiệm duy nhất thì:

$$\begin{cases} x_0 = 2 - x_0 \\ y_0 = 2 - y_0 \Leftrightarrow x_0 = y_0 = 1. \\ x_0 = y_0 \end{cases}$$

Với $x_0 = y_0 = 1$ ta suy ra $m = 4$.

Điều kiện đủ: Với $m = 4$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} |x+1| + |y-3| = 4 \\ |y+1| + |x-3| = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = 3 \end{cases}$$

Vậy, không tồn tại m để hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 17: Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} ax^2 + a = y + 1 \\ |x| + y^2 = 1 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần: Nhận xét rằng: nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì $(-x_0, y_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

Do đó hệ có nghiệm duy nhất thì: $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Với $x_0 = 0$ ta suy ra:

$$\begin{cases} a = y + 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

Điều kiện đủ

▪ Với $a = 0$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} y + 1 = 0 \\ |x| + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Do đó $a = 0$ không thỏa mãn.

▪ Với $a = 2$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x^2 = y - 1 & (1) \\ |x| = 1 - y^2 & (2) \end{cases} \quad (II)$$

Từ (1) $\Rightarrow y \geq 1$.

Từ (2) $\Rightarrow -1 \leq y \leq 1$.

Vậy hệ (II) tương đương với:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất.} \\ |x| = 0 \end{cases}$$

Vậy với $a = 2$ hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 18: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m - 5 \\ y + \cos x = 2 \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Điều kiện cần:

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm $(-x_0, y_0)$. Khi đó để hệ có nghiệm duy nhất là:

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \quad (*)$$

Với $x_0 = 0$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0^2 = m - 5 \\ y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 6.$$

Điều kiện đủ:

Với $m = 6$ ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1) \\ y + \cos x = 2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow y + \cos x \leq 2.$$

Vậy, hệ có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với $m = 6$ hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 19: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x| \\ \lg^2 x + y^2 = 1 \end{cases} \quad (I)$$

Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải

Điều kiện cần:

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm $(-x_0, y_0)$. Khi đó để hệ có nghiệm duy nhất là

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \quad (*)$$

Với $x_0 = 0$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = y_0 \\ y_0^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

Điều kiện đủ

a. Với $a = 0$ hệ có dạng:

$$\begin{cases} -1 = y - |\sin x| \\ \lg^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

hệ có vô số nghiệm dạng:

$$\begin{cases} x = k\pi \\ y = -1 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy $a = 0$ không thoả mãn.

b. Với $a = 2$ hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x^2 + 1 = y - |\sin x| & (1) \\ \lg^2 x + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có: $y \geq 1$ & từ (2) ta có:

$$-1 \leq y \leq 1 \Rightarrow y = 1.$$

Vậy, hệ có dạng:

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x^2 = -|\sin x| \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \lg^2 x = 1 \end{cases}$$

là nghiệm duy nhất của hệ.

Vậy, với $a = 2$ hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 20: Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} ax^2 + |\sin 2x| + a = y + 1 \\ |\lg 6x| + 2y^2 = 2 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần:

Nhận xét rằng: nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì $(-x_0, y_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

Do đó hệ có nghiệm duy nhất thì: $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Với $x_0 = 0$ ta suy ra:

$$\begin{cases} a = y + 1 \\ 2y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

Điều kiện đủ

▪ Với $a = 0$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} |\sin 2x| = y + 1 \\ |\lg 6x| + 2y^2 = 2 \end{cases} \quad (I)$$

Nhận xét rằng $x = \frac{k\pi}{2}$, k nguyên và $y = -1$ luôn là nghiệm của hệ

(I). Vậy hệ có vô số nghiệm.

Do đó $a = 0$ không thoả mãn.

▪ Với $a = 2$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x^2 + |\sin 2x| = y - 1 & (1) \\ |\lg 6x| = 2(1 - y^2) & (2) \end{cases} \quad (II)$$

Từ (1) $\Rightarrow y \geq 1$.

Từ (2) $\Rightarrow -1 \leq y \leq 1$.

Vậy hệ (II) tương đương với:

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x^2 + |\sin 2x| = 0 \\ |\lg 6x| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với $a = 2$ hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 21: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 2^{|x|} - 2^y = y - |x| (m + 1) \\ x^2 + y = m^2 \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Điều kiện cần: Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) suy ra $(-x_0, y_0)$ cũng là nghiệm.

Vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2^y = y & (1) \\ y = m^2 & (2) \end{cases} \quad (II)$$

Từ (2) $\Rightarrow y \geq 0 \Leftrightarrow 2^y \geq 1$, khi đó:

$$\begin{cases} VT_{(1)} \leq 0 \\ VP_{(1)} \geq 0 \end{cases}$$

Vậy hệ (II) tương đương với:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = m^2 \end{cases} \Rightarrow m = 0.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Giả sử $m = 0$, khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2^{|x|} - 2^y = y - |x| \\ x^2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|x|} + |x| = 2^y + y & (3) \\ x^2 + y = 0 & (4) \end{cases}$$

▪ Giải (3)

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy, phương trình (3) được viết dưới dạng:

$$f(|x|) = f(y) \Leftrightarrow |x| = y.$$

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} |x| = y \\ x^2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ là nghiệm duy nhất của hệ.}$$

Vậy, với $m = 0$ hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 22: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} (x+y)^2 + m \leq x+3y \\ (-x+y)^2 + m \leq -x+3y \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần:

Giả sử hệ có nghiệm (x_0, y_0) , suy ra $(-x_0, y_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

Vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là

$$-x_0 = x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0.$$

Khi đó:

$$y_0^2 + m \leq 3y_0 \Leftrightarrow y_0^2 - 3y_0 + m \leq 0 \quad (1)$$

Ta cần (1) phải có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}.$$

Vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $m = \frac{9}{4}$.

Điều kiện đủ: Với $m = \frac{9}{4}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} (y+x-\frac{3}{2})^2 \leq -2x \\ (y-x-\frac{3}{2})^2 \leq 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất của hệ.}$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất khi $m = \frac{9}{4}$.

Ví dụ 23: Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} |x| + |y+2| \geq 4 \\ x^2 + (y-2)^2 \leq m \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử hệ có nghiệm (x_0, y_0) suy ra $(-x_0, y_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

Do đó để hệ có nghiệm duy nhất điều kiện là

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0.$$

Với $x_0 = 0$, thay vào hệ ta được:

$$\begin{cases} |y+2| \geq 4 \\ (y-2)^2 \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ y \leq -6 \\ 2-\sqrt{m} \leq y \leq 2+\sqrt{m} \end{cases} \quad (II)$$

Để hệ (II) có nghiệm duy nhất điều kiện là:

$$\begin{cases} 2 = 2 + \sqrt{m} \\ -6 < 2 - \sqrt{m} \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy $m = 0$ là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 0$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} |x| + |y+2| \geq 4 \\ x^2 + (y-2)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + |y+2| \geq 4 \\ x=0 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy, với $m = 0$ hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 24: Xác định các giá trị của a sao cho hệ sau đây có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} ax - y + \frac{4a}{\sqrt{x^2+4}+x} = 3-a \\ y + \sqrt{x^2+4} = a^2+1 \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} -y + a\sqrt{x^2+4} = 3-a \\ y + \sqrt{x^2+4} = a^2+1 \end{cases} \quad (II)$$

Điều kiện cần: Giả sử hệ có nghiệm $(x_0, y_0) \Rightarrow (-x_0, y_0)$ cũng là nghiệm của phương trình.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là:

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0.$$

Khi đó hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} -y + 2a = 3-a \\ y+2 = a^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3a-3 \\ y = a^2-1 \end{cases} \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

Vậy $a = 1$ hoặc $a = 2$ là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ:

- Với $a = 1$, suy ra:

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất của hệ.}$$

- Với $a = 2$, suy ra:

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất của hệ.}$$

Vậy với $a = 1$ hoặc $a = 2$ hệ có nghiệm duy nhất.

Chú ý: Ví dụ trên có thể được thực hiện bằng phương pháp biến đổi tương đương, cụ thể:

Từ (II) suy ra:

$$(a+1)\sqrt{x^2+4} = a^2 - a + 4. \quad (1)$$

- Với $a \leq -1$ thì (2) vô nghiệm.
- Với $a > -1$ thì (2) có dạng:

$$\sqrt{x^2+4} = \frac{a^2 - a + 4}{a+1} \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{a^2 - a + 4}{a+1} \right)^2 - 4. \quad (2)$$

Hệ có nghiệm duy nhất thì trước hết (2) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2 - a + 4}{a+1} \right)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a + 4 = 2(a+1) \\ a^2 - a + 4 = -2(a+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Thử lại:

- Với $a = 1$, suy ra:

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất của hệ.}$$

- Với $a = 2$, suy ra:

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất của hệ.}$$

Vậy với $a = 1$ hoặc $a = 2$ hệ có nghiệm duy nhất

Ví dụ 25: Xác định các giá trị của a sao cho hệ sau đây có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a \\ x + y = 2a + 1 \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử hệ có nghiệm $(x_0, y_0) \Rightarrow (y_0 - 2, x_0 + 2)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là:

$$x_0 = y_0 - 2.$$

Khi đó hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{y_0-1} + \sqrt{y_0-1} = a \\ y_0 - 2 + y_0 = 2a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{y_0-1} = a \\ 2y_0 = 2a + 3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2(2a+3)-1} = a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ 4a - 2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2 + \sqrt{6}.$$

Vậy $a = 2 + \sqrt{6}$ là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ:

Với $a = 2 + \sqrt{6}$, hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 2 + \sqrt{6} \\ x + y = 2(2 + \sqrt{6}) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 2 + \sqrt{6} \\ (x+1) + (y-1) = 5 + 2\sqrt{6} \end{cases}$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{y-1} \end{cases}, u, v \geq 0.$$

Ta được:

$$\begin{cases} u + v = 2 + \sqrt{6} \\ u^2 + v^2 = 5 + 2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2 + \sqrt{6} \\ uv = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

suy ra u, v là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - (2 + \sqrt{6})t + \frac{1}{2}(5 + 2\sqrt{6}) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow u = v = \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \\ \sqrt{y-1} = \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6 + 4\sqrt{6}}{4} \\ y = \frac{14 + 4\sqrt{6}}{4} \end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $a = 2 + \sqrt{6}$.

Chú ý: Bài toán trên có thể được giải bằng phương pháp chuyển về hệ đại số quen thuộc và phương pháp đồ thị. Cụ thể

Điều kiện:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ y-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 1 \end{cases} \quad (*)$$

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

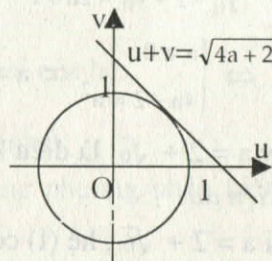
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a \\ (x+1) + (y-1) = 2a+1 \end{cases}$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{y-1} \end{cases}, u, v \geq 0.$$

Ta được:

$$\begin{cases} u+v = a & (1) \\ u^2 + v^2 = 2a+1 & (2) \end{cases}$$



Cách 1: (Sử dụng phương pháp đồ thị)

Gọi X_1 và X_2 lần lượt là tập nghiệm của (1) và (2).

Ta có:

- X_1 là tập các điểm trên đường thẳng (d) : $u+v-a=0$
- X_2 là tập các điểm trên đường tròn

$$(C) : \begin{cases} \text{Tam O} \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{2a+1} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi (d) tiếp xúc với đường tròn (C) trong cùng phần tư thứ nhất

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{6a-4} \Leftrightarrow a = 2 + \sqrt{6}$$

Cách 2: (Chuyển về hệ đại số quen thuộc)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v = a \\ uv = \frac{a^2 - 2a - 1}{2} \end{cases}$$

suy ra u, v là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - at + \frac{1}{2}(a^2 - 2a - 1) = 0. \quad (3)$$

Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm kép không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ -\frac{b}{2a} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + 4a + 2 = 0 \\ \frac{a}{2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2 + \sqrt{6}.$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $a = 2 + \sqrt{6}$.

Ví dụ 26: Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 - 2mx + 2m^2 + m - 2 = 0 \\ x^2 - 2mx + 2m > 0 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần: Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} (x-m)^2 + m^2 + m - 2 = 0 \\ (x-m)^2 - m^2 + 2m > 0 \end{cases} \quad (I)$$

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm x_0 thì:

$$\begin{cases} (x_0-m)^2 + m^2 + m - 2 = 0 \\ (x_0-m)^2 - m^2 + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(2m-x_0)-m]^2 + m^2 + m - 2 = 0 \\ [(2m-x_0)-m]^2 - m^2 + 2m > 0 \end{cases}$$

Tức là $2m - x_0$ cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$x_0 = 2m - x_0 \Leftrightarrow x_0 = m. \quad (*)$$

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 2 = 0 \\ -m^2 + 2m > 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với $m = 1$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 27: Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + m = 0 \\ x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m - 10 < 0 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần: Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} x(x-2) + m = 0 \\ x^2(x^2 - 4x + 4) + m - 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + m = 0 \\ x^2(x-2)^2 + m - 10 < 0 \end{cases} \quad (I)$$

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm x_0 thì:

$$\begin{cases} x_0(x_0-2) + m = 0 \\ x_0^2(x_0-2)^2 + m - 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(2-x_0)-2](2-x_0) + m = 0 \\ [(2-x_0)-2]^2(2-x_0)^2 + m - 10 < 0 \end{cases}$$

Tức là $2 - x_0$ cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1. \quad (*)$$

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + m = 0 \\ m - 9 < 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2(x-2)^2 - 9 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x + 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với $m = 1$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm m để các hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \leq m \\ x^2 + (y-2)^2 \leq m \end{cases}$$

Bài tập 2: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-m}{1+m} \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$$

Bài tập 3: Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x\sqrt{m-y^2} \leq m \\ y\sqrt{m-x^2} \geq m \end{cases}$$

Bài tập 4: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 2^{2x} + 2^{2y} \leq 2^{x+1} - 2^{y+1} + m - 2 \\ 2^{2x} + 2^{2y} \leq 2^{y+1} - 2^{x+1} + m - 2 \end{cases}$$

Bài tập 5: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + m \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

a. Giải hệ với $m = 2$.

b. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

Bài tập 6: Tìm a để hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} a(|x| + 1) = y + \cos x \\ |\sin x| + y^2 = 1 \end{cases}$$

Bài tập 7: Tìm a để hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} ax^2 + a = y + |\cos x| \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

Bài tập 8: Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} a|x| + a - 1 = y - |\sin x| \\ \lg^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

Bài tập 9: Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} a(|x| + 1) = y + \cos x \\ |\sin x| + y^2 = 1 \end{cases}$$

Bài tập 10: Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} + |y| = a \\ \sqrt{y^2 + 2} + |x| = 2a - \sqrt{2} \end{cases}$$

Bài tập 11: Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 2x + 2(a-1)y = a - 4 \\ 2|x + 1| + ay = 2 \end{cases}$$

Bài tập 12: Xác định các giá trị của m sao cho hệ sau đây có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = m^2 \\ 3y - m\sqrt{x^2 + 1} = 1 \end{cases}$$

Bài tập 13: Xác định các giá trị của m sao cho hệ sau đây có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} = m \\ x + y = 3m + 1 \end{cases}$$

Bài tập 14: Xác định các giá trị của m sao cho hệ sau đây có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{6-y} = m \\ \sqrt{y} + \sqrt{6-x} = m \end{cases}$$

Bài tập 15: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + m \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Bài tập 16: Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0 \\ x^2 - 3x - m^2 + 2m > 0 \end{cases}$$

Bài tập 17: Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 10x + 24 > 0 \\ x^2 + 2(m^2 - 1)x - 2m + 1 = 0 \end{cases}$$

Bài tập 18: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 \leq 1 \\ x - y + m = 0 \end{cases}$$

CHỦ ĐỀ 2

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ GIẢI BÀI TOÁN VỀ TÍNH CHẤT NGHIỆM

MỞ ĐẦU

Trong chủ đề này sẽ minh họa cách sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ giải bài toán về tính chất nghiệm cho phương trình, bất phương trình, hệ phương trình và hệ bất phương trình được chia thành hai dạng:

- Dạng 1: Giải bài toán về tính chất các nghiệm cho phương trình.
- Dạng 2: Giải bài toán về tập nghiệm.
- Dạng 3: Giải bài toán về phương trình hệ quả
- Dạng 4: Giải bài toán về hai phương trình tương đương

BÀI TOÁN 1

GIẢI BÀI TOÁN VỀ TÍNH CHẤT CÁC NGHIỆM CHO PHƯƠNG TRÌNH

I. PHƯƠNG PHÁP

Với yêu cầu:

"Tìm điều kiện của tham số (giả sử là m) để phương trình:

$$f(x, m) = 0 \quad (1)$$

có nghiệm thỏa mãn tính chất K "

ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Điều kiện cần: Giả sử phương trình có nghiệm thỏa mãn tính chất K , khi đó ta có:

- Hệ thức Viète giữa các nghiệm. (I)
- Biểu diễn điều kiện K thông qua (I)
- Suy ra điều kiện cho tham số.

Bước 2: Điều kiện đủ – Thực hiện phép thử lại.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Xác định m để phương trình:

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m-2 = 0. \quad (6)$$

có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2$. (*)

Giải

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn (*) khi đó:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-2}{m+1} \end{cases}$$

từ đó:

$$(*) \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{2(m-1)}{m+1} = 7 \cdot \frac{m-2}{m+1} \Leftrightarrow m = -6.$$

Điều kiện đủ: Với $m = -6$ thay vào (1), ta được:

$$-5x^2 + 14x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{2}{5} \end{cases}, \text{thỏa mãn } (*)$$

Vậy, với $m = -6$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 2: Xác định m để phương trình:

$$mx^2 - 2(m+1)x + m+1 = 0 \quad (1)$$

có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 2$. (*)

Giải

Điều kiện cần:

Giả sử phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn (*) khi đó:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m+1}{m} \end{cases}$$

từ đó:

$$(*) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(m+1)^2}{m^2} - \frac{2(m+1)}{m} = 2 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}.$$

Điều kiện đủ: Với $-\frac{2}{3}$ thay vào (1), ta được:

$$2x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, \text{thỏa mãn } (*)$$

Vậy, với $m = -\frac{2}{3}$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 3: Giả sử phương trình:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

có hai nghiệm x_1, x_2 . CMR hệ thức:

$$b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc$$

là điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng bình phương của nghiệm còn lại.

Giải

Theo giả thiết ta được:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \quad (I)$$

Xét biểu thức:

$$\begin{aligned} P &= (x_1 - x_2^2)(x_2 - x_1^2) = x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - (x_1^3 + x_2^3) \\ &= x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - [(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)] \end{aligned}$$

$$= \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} - \left[-\frac{b^3}{a^3} + 3\frac{c}{a} \cdot \frac{b}{a} \right] = \frac{b^3 + a^2c + ac^2 - 3abc}{a^3}.$$

Vậy, nếu

$$b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc$$

thì một trong hai thừa số của P phải bằng 0 và ngược lại (Đpcm).

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

có hai nghiệm x_1, x_2 . CMR hệ thức:

$$(k+1)^2ac - kb^2 = 0 \quad (k \neq 0)$$

là điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng k lần nghiệm còn lại.

Giải

Theo giả thiết ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \quad (I)$$

Xét

$$\begin{aligned} P &= (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = x_1x_2 - k(x_1^2 + x_2^2) + k^2x_1x_2 \\ &= x_1x_2 - k[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] + k^2x_1x_2 \\ &= \frac{c}{a} - k\left[\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}\right] + k^2\frac{c}{a} = \frac{(k+1)^2ac - kb^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Vậy, nếu $(k+1)^2ac - kb^2 = 0$ thì một trong hai thừa số của P phải bằng 0 và ngược lại. Đó là điều phải chứng minh.

Ví dụ 5: Xác định m để phương trình:

$$x^3 - (m+1)x^2 - x + 2m = 0 \quad (1)$$

có ba nghiệm phân biệt, biết rằng trong số các nghiệm số có hai nghiệm đối nhau.

Giải

Điều kiện cần:

Giả sử phương trình có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 và $x_1 + x_3 = 0$, khi đó:

$$x_1 + x_2 + x_3 = m+1 \Leftrightarrow x_2 = m+1$$

Với $x_2 = m+1$ thay vào (1) ta được:

$$(m+1)^3 - (m+1)^2 - (m+1) + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Điều kiện đủ: Với $m = 1$ thay vào (1) ta được:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Ta có $x_1 + x_3 = 0$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy, với $m = 1$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 6: Xác định m để phương trình:

$$x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2 = 0 \quad (1)$$

có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 , thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15$.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 , khi đó:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3m \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3 \\ x_1x_2x_3 = -3m - 2 \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} 15 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 9m^2 + 6 \\ &\Leftrightarrow m^2 > 1 \Leftrightarrow |m| > 1. \end{aligned}$$

Điều kiện đủ: Viết lại phương trình về dạng:

$$(x-1)[x^2 - (3m-1)x - 3m-2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 - (3m-1)x - 3m-2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Ta phải đi chứng minh với $|m| > 1$ thì (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1, tức là chứng minh:

$$\begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 6m + 9 > 0 \\ m \neq 0 \end{cases}, \text{ luôn đúng với } |m| > 1.$$

Vậy với $|m| > 1$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Bài toán trên cũng có thể được trình bày như sau:

Viết lại phương trình về dạng:

$$(x-1)[x^2 - (3m-1)x - 3m-2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 - (3m-1)x - 3m-2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Trước hết (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $\neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 6m + 9 > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0. \quad (*)$$

Với điều kiện đó (1) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thoả mãn :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3m \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3 \\ x_1x_2x_3 = -3m - 2 \end{cases}$$

Khi đó:

$$15 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 9m^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow m^2 > 1 \Leftrightarrow |m| > 1 \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy, với $|m| > 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 7: Xác định m để phương trình:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0 \quad (1)$$

có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt thành cấp số cộng, khi đó:

$$x_1 + x_3 = 2x_2, \quad (*)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Leftrightarrow 3x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1.$$

Với $x_2 = -1$ thay vào (1) ta được:

$$11 - m = 0 \Leftrightarrow m = 11.$$

Đó chính là điều kiện cần để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Điều kiện đủ: Với $m = 11$, ta được:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{12} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 + \sqrt{12} \end{cases}, \text{ thoả mãn } (*)$$

Vậy, với $m = 11$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý:

1. Trong bài toán trên ở điều kiện đủ ta khẳng định được:

a. Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

b. Ta có $x_1 + x_3 = 2x_2$, tức là x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng.

Do đó có kết luận $m = 11$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Tuy nhiên tồn tại bài toán mà các giá trị của tham số tìm được trong điều kiện cần không thoả mãn điều kiện đủ.

2. Bài toán trên có thể được giải bằng phương pháp hằng số bất định, như sau:

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm $x_0 - d, x_0, x_0 + d, (d \neq 0)$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 9x + m &= [x - (x_0 - d)][x - x_0][x - (x_0 + d)] \\ &= (x - x_0)[(x - x_0)^2 - d^2] \\ &= x^3 - 3x_0x^2 + (3x_0^2 - d^2)x - x_0^3 + d^2x_0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 = -3x_0 \\ -9 = 3x_0^2 - d^2 \\ m = -x_0^3 + d^2x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ d = \pm 2\sqrt{3} \\ m = 11 \end{cases}$$

Vậy, với $m = 11$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

3. Để tìm điều kiện của tham số sao cho phương trình:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ với } a \neq 0 \quad (1)$$

có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng, bằng phương pháp điều kiện cần và đủ ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: **Điều kiện cần:** Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt thành cấp số cộng, khi đó:

$$x_1 + x_3 = 2x_2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow 3x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{b}{3a}.$$

Với $x_2 = -\frac{b}{3a}$ thay vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d &= 0 \\ \Leftrightarrow 2b^3 - 9abc + 27a^2d &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Đó chính là điều kiện cần để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Bước 2: **Điều kiện đủ** – Thực hiện phép thử lại.

Lưu ý: Với các em học sinh đã tiếp xúc với kiến thức về đồ thị của hàm số bậc ba có thể sử dụng điều kiện cần là "Điểm uốn thuộc trục hoành", cụ thể:

Điều kiện cần:

Để phương trình có ba nghiệm phân biệt với hoành độ lập thành cấp số cộng thì điểm uốn U của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ thuộc trục hoành.

$$\Leftrightarrow y_U = 0 \Leftrightarrow y_{(1)} = 0 \Leftrightarrow -11 + m = 0 \Leftrightarrow m = 11$$

Điều kiện đủ:

Với $m = 11$, ta được:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{12} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 + \sqrt{12} \end{cases}, \text{thỏa mãn (*)}$$

Vậy, với $m = 11$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 8: Xác định m để phương trình:

$$x^3 + 2x^2 + (m + 1)x + 2(m + 1) = 0 \quad (1)$$

có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân, khi đó:

$$x_1 x_3 = x_2^2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2,$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = m + 1 \Leftrightarrow x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_2^2 = m + 1$$

$$\Leftrightarrow x_2(x_1 + x_2 + x_3) = m + 1 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{m+1}{2}.$$

Với $x_2 = -\frac{m+1}{2}$ thay vào (1) ta được:

$$\left(-\frac{m+1}{2}\right)^3 + 2\left(-\frac{m+1}{2}\right)^2 + (m+1)\left(-\frac{m+1}{2}\right) + 2(m+1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m^2 + 2m - 15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \\ m = -4 \end{cases}.$$

Đó chính là điều kiện cần để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân.

Điều kiện đủ

▪ Với $m = -1$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \text{ không thỏa mãn.}$$

▪ Với $m = 3$, ta được:

$$x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ không thỏa mãn.}$$

▪ Với $m = -5$, ta được:

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ không thỏa mãn.}$$

Vậy, không tồn tại m thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Vậy, để tìm điều kiện của tham số sao cho phương trình:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ với } a \neq 0 \quad (1)$$

có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số nhân, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: **Điều kiện cần:** Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân, khi đó:

$$x_1 x_3 = x_2^2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_2^2 = \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x_2(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{c}{b}.$$

Với $x_2 = -\frac{c}{b}$ thay vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} a\left(-\frac{c}{b}\right)^3 + b\left(-\frac{c}{b}\right)^2 + c\left(-\frac{c}{b}\right) + d &= 0 \\ \Leftrightarrow ac^3 &= b^3 d. \end{aligned} \quad (2)$$

Đó chính là điều kiện cần để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân.

Bước 2: **Điều kiện đủ** – Thực hiện phép thử lại.

Ví dụ 9: Cho phương trình:

$$\sqrt{3} \sin x + m \cos x = 1$$

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \in [0, 2\pi)$ sao cho $x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3}$.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có nghiệm $x = \alpha \in [0, \frac{2\pi}{3}]$, khi đó

$$\sqrt{3} \sin \alpha + m \cos \alpha = 1.$$

Mặt khác, vì $x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3}$ nên $x = \frac{2\pi}{3} - \alpha$ cũng là nghiệm, khi đó:

$$\sqrt{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + m \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = 1.$$

Như vậy:

$$\begin{cases} \sqrt{3} \sin \alpha + m \cos \alpha = 1 \\ \sqrt{3} \sin(\frac{2\pi}{3} - \alpha) + m \cos(\frac{2\pi}{3} - \alpha) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \cos \alpha = 1 - \sqrt{3} \sin \alpha \\ m(-\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha) = 1 - \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \alpha}{-\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha} = \frac{1 - \sqrt{3} \sin \alpha}{2 - 3 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}$$

$$\Leftrightarrow (2 - 3 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha) \cos \alpha = (-\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha)(1 - \sqrt{3} \sin \alpha)$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos 2\alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha = 3 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin 2\alpha \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2\alpha - \frac{\pi}{6}) = \cos(\alpha + \frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \frac{\pi}{6} = \alpha + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2\alpha - \frac{\pi}{6} = -\alpha - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \alpha = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{3} \\ \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

- Với $\alpha = \frac{\pi}{3}$, thay vào phương trình ta được:

$$\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} + m \cos \frac{\pi}{3} = 1 \Leftrightarrow m = -1.$$

- Với $\alpha = 0$, thay vào phương trình ta được:

$$\sqrt{3} \sin 0 + m \cos 0 = 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

- Với $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, thay vào phương trình ta được:

$$\sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3} + m \cos \frac{2\pi}{3} = 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy với $m = \pm 1$ là điều kiện cần.

Điều kiện đủ:

- Với $m = 1$, thay vào phương trình ta được:

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x \in [0, 2\pi) \\ \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \end{matrix}$$

Nhận xét rằng khi đó

$$x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3}, \text{ do đó } m = 1 \text{ thỏa mãn.}$$

- Với $m = -1$ - Đề nghị bạn đọc tự làm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xác định m để phương trình:

$$x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m + 4 = 0.$$

có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

Bài tập 2: Cho phương trình:

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0.$$

- Xác định m để tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng 2.
- Xác định m để phương trình có hai nghiệm bằng nhau về trị tuyệt đối.
- Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 1$.

Bài tập 3: Cho phương trình:

$$(m+2)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0.$$

- Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu.
- Xác định m để tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng 3.
- Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$.

Bài tập 4: Cho phương trình:

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để phương trình có một nghiệm bằng k lần nghiệm còn lại.

Bài tập 5: Xác định a, b để phương trình:

$$x^3 + ax + b = 0$$

có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng

Bài tập 6: Cho phương trình:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 . CMR 3 nghiệm đó lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$2a^3 - 9ab + 27c = 0.$$

Bài tập 7: Xác định m để phương trình:

$$x^4 - 8x^3 + 19x^2 + 3mx + 2 = 0$$

có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4.$$

BÀI TOÁN 2

GIẢI BÀI TOÁN VỀ TẬP NGHIỆM

I. PHƯƠNG PHÁP

Với yêu cầu:

"Tìm giá trị của tham số m để phương trình, bất phương trình hoặc hệ nghiệm đúng với mọi x thuộc D_x "

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để các biểu thức của phương trình, bất phương trình hoặc hệ có nghĩa.

Bước 2: *Điều kiện cần:* Giả sử phương trình, bất phương trình hoặc hệ nghiệm đúng với $\forall x \in D_x$ suy ra nó nghiệm đúng với $x_0 \in D_x$.

▪ Giải bài toán với $x = x_0 \Rightarrow$ giá trị của tham số m_0 .

Bước 3: *Điều kiện đủ:* Thực hiện phép kiểm tra với $x = x_0$.

Chú ý: Việc chỉ ra giá trị $x_0 \in D_x$ được gọi là phương pháp sử dụng điểm thuận lợi trong việc tìm điều kiện cần và:

- Hoàn toàn có thể sử dụng một hoặc nhiều điểm thuận lợi $x_0, x_1, \dots$ trong việc xác định điều kiện cần.
- Với câu hỏi "Nên lấy những giá trị nào từ tập D_x để làm điểm thuận lợi" chỉ có thể trả lời rằng cần sử dụng trực giác và kinh nghiệm của từng người. Các em học sinh cần tích lũy dần những kinh nghiệm này thông qua các ví dụ.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình sau nghiệm đúng $\forall x \geq -2$:

$$|x - m| = x + 4. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Phương trình nghiệm đúng $\forall x \geq -2$ suy ra $x = -2$ là nghiệm của (1), tức là:

$$|m + 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 \end{cases}$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình nghiệm đúng $\forall x \geq -2$.

Điều kiện đủ

▪ Với $m = 0$, ta có:

$$|x| = x + 4.$$

Nhận thấy rằng $x = 0 \in [-2, \infty)$ không phải là nghiệm của phương trình, do đó, $m = 0$ không thỏa mãn.

▪ Với $m = -4$, ta có:

$$|x + 4| = x + 4 \text{ đúng với } x \geq -2.$$

Vậy, với $m = -4$ phương trình nghiệm đúng $\forall x \geq -2$.

Chú ý: Bài toán trên còn có thể phát biểu dưới dạng:

"Tìm m để phương trình

$$|x - m| = x + 4$$

tương đương với bất phương trình

$$f(x) \geq 0 \text{ (hoặc } f(x) \leq 0 \text{)}."$$

(2)

Trong đó nghiệm của bất phương trình (2) là $x \geq -2$.

Ví dụ 2: Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng $\forall x \in [1, 3]$:

$$|2x^2 + mx + m + 15| \leq 1. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in [1, 3] \Rightarrow$ nghiệm đúng với $x = 1, x = 2$, tức là ta có:

$$\begin{cases} |2m + 17| \leq 1 \\ |3m + 23| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 2m + 17 \leq 1 \\ -1 \leq 3m + 23 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq m \leq -8 \\ -8 \leq m \leq -\frac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -8.$$

Vậy $m = -8$ là điều kiện cần để (1) nghiệm đúng $\forall x \in [1, 3]$.

Điều kiện đủ: Với $m = -8$, ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow |2x^2 - 8x + 7| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x^2 - 8x + 7 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 8 \geq 0 \\ 2x^2 - 8x + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Vậy, với $m = -8$ bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in [1, 3]$.

Chú ý:

1. Có thể sử dụng phép biến đổi tương đương để thực hiện ví dụ trên, cụ thể:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2x^2 + mx + m + 14 \leq 0 \quad (2) \\ g(x) = 2x^2 + mx + m + 16 \geq 0 \quad (3) \end{cases} \quad (I)$$

Vậy (1) nghiệm đúng $\forall x \in [1, 3]$

$$\Leftrightarrow (I) \text{ nghiệm đúng } \forall x \in [1, 3]$$

$$\Leftrightarrow (2) \text{ và } (3) \text{ nghiệm đúng } \forall x \in [1, 3].$$

a. (2) nghiệm đúng $\forall x \in [1, 3]$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ có nghiệm } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } x_1 \leq 1 < 3 \leq x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(1) \leq 0 \\ af(3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 16 \leq 0 \\ 4m + 32 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -8.$$

b. (3) nghiệm đúng $\forall x \in [1, 3]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \text{ vô nghiệm} \\ g(x) = 0 \text{ có nghiệm } x_3 \leq x_4 \leq 1 \leq 3 \\ g(x) = 0 \text{ có nghiệm } 1 \leq 3 \leq x_3 \leq x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m - 128 \leq 0 \\ m^2 - 8m - 128 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 18 \geq 0 \\ -m \leq 4 \\ 4m + 34 \geq 0 \\ -m \geq 12 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -8.$$

Vậy (1) nghiệm đúng $\forall x \in [1, 3]$ khi $m = -8$.

2. Bài toán trên còn được phát biểu tương đương dưới dạng: "Tìm m sao cho bất phương trình $|2x^2 + mx + m + 15| > 1$ không có nghiệm trên $[1, 3]$ ". Khi đó để giải bài toán thông thường ta lên phát biểu lại như sau:

Bất phương trình $|2x^2 + mx + m + 15| > 1$ không có nghiệm trên $[1, 3]$

$$\Leftrightarrow \text{Bất phương trình } |2x^2 + mx + m + 15| \leq 1 \text{ nghiệm đúng với } \forall x \in [1, 3].$$

Ví dụ 3: Tìm a, b, c để mọi $x \in [-1, 1]$ luôn có:

$$|4x^3 + ax^2 + bx + c| \leq 1.$$

Giải

Điều kiện cần: Bất phương trình sau nghiệm đúng $\forall x \in [-1, 1] \Rightarrow$

nghiệm đúng với $x = 1, x = -1, x = \frac{1}{2}, x = -\frac{1}{2}$, tức là ta có:

$$\begin{cases} |4 + a + b + c| \leq 1 \\ | -4 + a - b + c| \leq 1 \\ |2 + a + 2b + 4c| \leq 4 \\ | -2 + a - 2b + 4c| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq a + b + c \leq 3 \quad (1) \\ 3 \leq a - b + c \leq 5 \quad (2) \\ -6 \leq a + 2b + 4c \leq 2 \quad (3) \\ -2 \leq a - 2b + 4c \leq 6 \quad (4) \end{cases}$$

Bằng cách đổi dấu 2 vế của (2) rồi kết hợp với (1), ta được:

$$-5 \leq b \leq -3. \quad (5)$$

Bằng cách đổi dấu 2 vế của (4) rồi kết hợp với (3), ta được:

$$-3 \leq b \leq 1. \quad (6)$$

Từ (5), (6) suy ra $b = -3$.

Thay $b = -3$ vào (1), (2) ta được:

$$\begin{cases} -2 \leq a+c \leq 0 \\ 0 \leq a+c \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow a+c=0 \Leftrightarrow a=-c. \quad (7)$$

Thay $b = -3$, $a = -c$ vào (3), (4) ta được:

$$\begin{cases} 0 \leq 3c \leq 8 \\ -8 \leq 3c \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow c=0 \Rightarrow a=0. \quad (8)$$

Vậy $a = c = 0$ và $b = -3$ là điều kiện cần để (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [-1, 1]$.

Điều kiện đủ: Vậy $a = c = 0$ và $b = -3$, ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow |4x^3 - 3x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 4x^3 - 3x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 3x + 1 \geq 0 \\ 4x^3 - 3x - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(4x^2 - 4x + 1) \geq 0 \\ (x-1)(4x^2 + 4x + 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Vậy với $a = c = 0$ và $b = -3$ bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [-1, 1]$.

Chú ý: Ta cũng có thể chứng minh cho điều kiện đủ bằng phương pháp lượng giác hoá. Thật vậy:

Vì $x \in [-1, 1] \Rightarrow$ đặt $x = \cos \alpha$, khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow |4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha| \leq 1 \Leftrightarrow -|\cos 3\alpha| \leq 1 \text{ luôn đúng.}$$

Ví dụ 4: Tìm m để tập nghiệm của bất phương trình

$$\sqrt{x^2 - 2mx} > 1 - x. \quad (1)$$

chứa đoạn $[\frac{1}{4}, 1]$.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm $\forall x \in [\frac{1}{4}, 1] \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ và $x = 1$ là nghiệm của (1), khi đó:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{m}{2}} > 1 - \frac{1}{4} \\ \sqrt{1 - 2m} > 1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

Đó chính là điều kiện cần để nghiệm của bất phương trình chứa $[\frac{1}{4}, 1]$.

Điều kiện đủ: Giả sử $m < -1$, khi đó viết lại (1) có dạng:

$$x - 1 + \sqrt{x^2 - 2mx} > 0.$$

Xét hàm số $y = x - 1 + \sqrt{x^2 - 2mx}$ trên đoạn $[\frac{1}{4}, 1]$

▪ Đạo hàm:

$$y' = 1 - \frac{x-m}{\sqrt{x^2 - 2mx}}$$

Vì $x \in [\frac{1}{4}, 1]$ và $m < -1$

$\Rightarrow y' > 0$, hàm số luôn đồng biến

$$\Rightarrow y > y(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - 1 + \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{m}{2}} > \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + \sqrt{x^2 - 2mx} > 0$$

Vậy, với $m < -1$ nghiệm của bất phương trình chứa $[\frac{1}{4}, 1]$.

Chú ý: Cũng có thể không cần sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ trong bài toán trên. Cụ thể:

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$x^2 - 2mx > (1-x)^2 \Leftrightarrow f(x) = 2(m-1)x + 1 < 0 \quad (*)$$

Vậy để nghiệm của bất phương trình chứa $[\frac{1}{4}, 1]$ điều kiện là:

$$\begin{cases} f(\frac{1}{4}) < 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-1}{2} + 1 < 0 \\ 2(m-1) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ 2m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

Vậy với $m < -1$ nghiệm của bất phương trình chứa $[\frac{1}{4}, 1]$.

Ví dụ 5: Tìm m để bất phương trình

$$\sqrt{(2+x)(4-x)} \leq x^2 - 2x + m. \quad (1)$$

nghiệm đúng với mọi $x \in [-2, 4]$.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm $\forall x \in [-2, 4] \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của (1), khi đó:

$$3 \leq m - 1 \Leftrightarrow m \geq 4.$$

Đó là điều kiện cần để bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in [-2, 4]$.

Điều kiện đủ: Giả sử $m \geq 4$, khi đó:

▪ Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho vế trái, ta được:

$$VT = \sqrt{(2+x)(4-x)} \leq \frac{(2+x)+(4-x)}{2} = 3.$$

- Biến đổi về phải về dạng:

$$VP = x^2 - 2x + m = (x - 1)^2 + m - 1 \geq 3$$

Suy ra:

$$\sqrt{(2+x)(4-x)} \leq x^2 - 2x + m.$$

Vậy, với $m \geq 4$ bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in [-2, 4]$.

Chú ý: Bài toán trên còn có thể được thực hiện bằng các cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương.

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + m \geq 0 & (2) \\ (2+x)(4-x) \leq (x^2 - 2x + m)^2 & (3) \end{cases} \quad (I)$$

Vậy (1) nghiệm đúng $\forall x \in [-2, 4]$

$\Leftrightarrow$ (I) nghiệm đúng $\forall x \in [-2, 4]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2) \text{ nghiệm đúng } \forall x \in [-2, 4] \\ (3) \text{ nghiệm đúng } \forall x \in [-2, 4] \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 4.$$

Vậy, với $m \geq 4$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ cùng với tam thức bậc hai.

Đặt $t = \sqrt{(2+x)(4-x)}$, với $x \in [-2, 4]$ ta nhận được điều kiện của t là $0 \leq t \leq 3$.

Khi đó bất phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 + t - 8 - m \leq 0. \quad (4)$$

Vậy để (4) nghiệm đúng với mọi $t \in [0, 3]$

$\Leftrightarrow f(t) = 0$ có nghiệm thỏa mãn $t_1 \leq 0 \leq 3 \leq t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.f(0) \leq 0 \\ a.f(3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 - m \leq 0 \\ 4 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 4.$$

Vậy, với $m \geq 4$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Cách 3: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ cùng với phương pháp hàm số.

Đặt $t = \sqrt{(2+x)(4-x)}$, với $x \in [-2, 4]$ ta nhận được điều kiện của t là $0 \leq t \leq 3$.

Khi đó bất phương trình có dạng:

$$t^2 + t - 8 \leq m. \quad (5)$$

Xét hàm số $y = t^2 + t - 8$.

- Miền xác định $D = [0, 3]$.

- Đạo hàm:

$$y' = 2t + 1 > 0, \forall t \in [0, 3] \Rightarrow \text{hàm số đồng biến trên } [0, 3]$$

Vậy để (5) nghiệm đúng với mọi $t \in [0, 3]$

$$\Leftrightarrow m \geq y(3) \Leftrightarrow m \geq 4.$$

Vậy, với $m \geq 4$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 6: Tìm m để phương trình sau nghiệm đúng $\forall x \geq 0$:

$$\sqrt{x^2 + 2x - m^2 + 2m + 4} = x + m - 2. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm $\forall x \geq 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của (1), khi đó:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{-m^2 + 2m + 4} = m - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \geq 0 \\ -m^2 + 2m + 4 = (m - 2)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow m = 3. \end{aligned}$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình nghiệm đúng với $\forall x \geq 0$.

Điều kiện đủ: Với $m = 3$, khi đó (1) có dạng:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 1} = x + 1 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với $m = 3$ phương trình nghiệm đúng $\forall x \geq 0$.

Chú ý: Với bài toán có nhiều hơn một tham số ta sẽ thấy tầm quan trọng của việc lựa chọn điểm thuận lợi cùng với việc xác định các giá trị của tham số được thực hiện tuần tự. Để minh họa chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 7: Tìm m để phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \geq -2$:

$$\lg(x - m)^2 = 2(x + 4). \quad (1)$$

Giải

Điều kiện $x \neq m$.

Trước hết để phương trình nghiệm đúng với mọi $x \geq -2$, ta phải có $m < -2$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\lg|x - m| = 2(x + 4) \Leftrightarrow |x - m| = x + 4. \quad (2)$$

Điều kiện cần: Phương trình nghiệm đúng với $\forall x \geq -2 \Rightarrow x = -2$ là nghiệm của (2), tức là:

$$|m + 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 \end{cases} \quad (I)$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình nghiệm đúng với $\forall x \geq -2$.

Điều kiện đủ: Với $m = -4$, ta có:

$$|x + 4| = x + 4 \Leftrightarrow \sqrt{x + 4} = x + 4 \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với $m = -4$ phương trình nghiệm đúng với $\forall x \geq -2$.

Ví dụ 8: Tìm a, b để phương trình sau nghiệm đúng $\forall x$:

$$a\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+bx+1} = 0. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm $\forall x \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của (1), khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Với $a = 1$:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+bx+1} \Leftrightarrow x^2+1 = x^2+bx+1$$

$$\Leftrightarrow bx = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

Vậy $a = 1$ và $b = 0$ là điều kiện cần để phương trình nghiệm đúng $\forall x$.

Điều kiện đủ: Với $a = 1$ và $b = 0$, khi đó (1) có dạng:

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với $a = 1$ và $b = 0$ phương trình nghiệm đúng $\forall x$.

Ví dụ 9: Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x \in [1, 3]$:

$$2^{12x^2+m(x+1)+15} \leq 2 - (m+8)(x^2-3x+2). \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [1, 3] \Rightarrow$ nghiệm đúng với $x = 1, x = 2$, tức là ta có:

$$\begin{cases} 12m+17 \leq 1 \\ 13m+23 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 2m+17 \leq 1 \\ -1 \leq 3m+23 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq m \leq -8 \\ -8 \leq m \leq -\frac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -8.$$

Vậy $m = -8$ là điều kiện cần để (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [1, 3]$.

Điều kiện đủ: Với $m = -8$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 12x^2 - 8x + 7 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x^2 - 8x + 7 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 8 \geq 0 \\ 2x^2 - 8x + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3.$$

Vậy, với $m = -8$ bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [1, 3]$.

Ví dụ 10: Tìm m để phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x > 0$:

$$\sqrt{2^{\log_{m+1} x^2}} = x. \quad (1).$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm $\forall x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{m+1}$ là nghiệm của (1), khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2^{\log_{m+1}(\sqrt{m+1})^2}} = \sqrt{m+1} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{m+1} \Leftrightarrow m = 1$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình nghiệm đúng với $\forall x > 0$.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, khi đó (1) có dạng:

$$\sqrt{2^{\log_2 x^2}} = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = x \Leftrightarrow x = x \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với $m = 1$ phương trình nghiệm đúng với $\forall x > 0$.

Ví dụ 11: Tìm m để tập nghiệm của bất phương trình:

$$\sqrt{2^{2x} - m2^{x+1}} > 1 - 2^x.$$

chứa đoạn $[-2, 0]$.

Giải

Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó với $x \in [-2, 0]$

$$\Leftrightarrow 2^{-2} \leq 2^x \leq 2^0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq t \leq 1,$$

do đó bài toán được phát biểu lại:

“Tìm m để tập nghiệm của bất phương trình

$$\sqrt{t^2 - 2mt} > 1 - t. \quad (1)$$

chứa đoạn $[\frac{1}{4}, 1]$.”

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm $\forall t \in [\frac{1}{4}, 1] \Rightarrow t = \frac{1}{4}$ và $t = 1$ là nghiệm của (1), khi đó:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{m}{2}} > 1 - \frac{1}{4} \\ \sqrt{1 - 2m} > 1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

Đó chính là điều kiện cần để nghiệm của bất phương trình chứa $[\frac{1}{4}, 1]$.

Điều kiện đủ: Giả sử $m < -1$, khi đó viết lại (1) có dạng:

$$t - 1 + \sqrt{t^2 - 2mt} > 0.$$

Xét hàm số $y = t - 1 + \sqrt{t^2 - 2mt}$ trên đoạn $[\frac{1}{4}, 1]$

Đạo hàm:

$$y' = 1 - \frac{t-m}{\sqrt{t^2 - 2mt}}.$$

Vì $t \in [\frac{1}{4}, 1]$ và $m < -1$

$\Rightarrow y' > 0$, hàm số luôn đồng biến

$$\Rightarrow y > y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - 1 + \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{m}{2}} > \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow t - 1 + \sqrt{t^2 - 2mt} > 0.$$

Vậy, với $m < -1$ nghiệm của bất phương trình chứa $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$.

Chú ý: Cũng có thể không cần sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ trong bài toán trên, cụ thể:

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$t^2 - 2mt > (1-t)^2 \Leftrightarrow f(t) = 2(m-1)t + 1 < 0 \quad (*)$$

Vậy để nghiệm của bất phương trình chứa $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ điều kiện là:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{4}\right) < 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-1}{2} + 1 < 0 \\ 2(m-1) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ 2m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

Vậy, với $m < -1$ nghiệm của bất phương trình chứa $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$.

Ví dụ 12: Tìm m để phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x > 0$:

$$m \cdot 2^{3x} + 3^{\log_m + 3x} = x. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm $\forall x > 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của (1), khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 8m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình nghiệm đúng với $\forall x > 0$.

Điều kiện đủ: Với $m = 0$, khi đó (1) có dạng:

$$3^{\log_3 x} = x \Leftrightarrow x = x \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với $m = 0$ phương trình nghiệm đúng với $\forall x > 0$.

Ví dụ 13: Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng $\forall x \in [1, 3]$:

$$2^{12x^2 + m(x+1) + 15} \leq 2 - (m+8)(x^2 - 3x + 2). \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in [1, 3] \Rightarrow$ nghiệm đúng với $x = 1, x = 2$, tức là ta có:

$$\begin{cases} |12m+17| \leq 1 \\ |13m+23| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 12m+17 \leq 1 \\ -1 \leq 13m+23 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq m \leq -8 \\ -8 \leq m \leq -\frac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -8.$$

Vậy $m = -8$ là điều kiện cần để (1) nghiệm đúng $\forall x \in [1, 3]$.

Điều kiện đủ: Với $m = -8$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow |2x^2 - 8x + 7| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x^2 - 8x + 7 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 8 \geq 0 \\ 2x^2 - 8x + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3.$$

Vậy, với $m = -8$ bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in [1, 3]$.

Ví dụ 14: Tìm điều kiện của m để bất phương trình:

$$\lg \sqrt{(2+x)(4-x)} \leq \lg(x^2 - 2x + m) \quad (1)$$

nghiệm đúng với mọi $x \in (-2, 4)$.

Giải

Biến đổi bất phương trình tương đương với:

$$\sqrt{(2+x)(4-x)} \leq x^2 - 2x + m. \quad (2)$$

Để (1) nghiệm đúng với mọi $x \in (-2, 4)$

$\Leftrightarrow$ (2) nghiệm đúng với mọi $x \in (-2, 4)$.

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm $\forall x \in (-2, 4) \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của (1), khi đó:

$$3 \leq m - 1 \Leftrightarrow m \geq 4.$$

Đó là điều kiện cần để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in (-2, 4)$.

Điều kiện đủ: Giả sử $m \geq 4$, khi đó:

▪ Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho vế trái, ta được:

$$VT = \sqrt{(2+x)(4-x)} \leq \frac{(2+x)+(4-x)}{2} = 3.$$

▪ Biến đổi vế phải về dạng:

$$VP = x^2 - 2x + m = (x-1)^2 + m - 1 \geq 3$$

▪ Suy ra:

$$\sqrt{(2+x)(4-x)} \leq x^2 - 2x + m.$$

Vậy, với $m \geq 4$ bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in (-2, 4)$.

Chú ý: Có thể sử dụng gtln, gtnn của hàm số để giải ví dụ trên, cụ thể:

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + m \geq 0 \\ (2+x)(4-x) \leq (x^2 - 2x + m)^2 \end{cases} \quad (I)$$

Vậy (1) nghiệm đúng với $\forall x \in (-2, 4)$

$\Leftrightarrow$ (I) nghiệm đúng với $\forall x \in (-2, 4)$

$$\begin{cases} (3) \text{ nghiệm đúng } \forall x \in (-2, 4) \\ (4) \text{ nghiệm đúng } \forall x \in (-2, 4) \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 4.$$

Vậy, với $m \geq 4$ bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in (-2, 4)$.

Ví dụ 15: Xác định m để hệ sau nghiệm đúng với mọi $x \in [0, 2]$:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \\ x - y + m = 0 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần: Hệ nghiệm đúng với mọi $x \in [0, 2]$, do đó:

- Hệ nghiệm đúng với $x = 0$, ta có:

$$\begin{cases} (y-1)^2 \leq 1 \\ y = m \end{cases} \Rightarrow (m-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2 \quad (1)$$

- Hệ nghiệm đúng với $x = 2$, ta có:

$$\begin{cases} (y-1)^2 \leq 1 \\ y = m+2 \end{cases} \Rightarrow (m+1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow m^2 + 2m \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0 \quad (2)$$

- Từ (1) & (2) suy ra $m = 0$ là điều kiện cần.

Điều kiện đủ: Với $m = 0$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2.$$

Vậy, với $m = 0$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 16: Cho hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 6m + 5 \leq y \\ (x-y-m-2)(x-y-m-5) \leq 0 \end{cases}$$

Xác định m để tập nghiệm của hệ chứa đoạn $[2, 4]$ của trục hoành.

Giải

Điều kiện cần: Tập nghiệm của hệ chứa đoạn $[2, 4]$ của trục hoành, do đó chứa điểm $A(2, 0)$ và $B(4, 0)$.

- Điểm A thỏa mãn hệ, ta có:

$$\begin{cases} m^2 + 2m - 3 \leq 0 \\ m(m+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 0. \quad (1)$$

- Điểm B thỏa mãn hệ, ta có:

$$\begin{cases} m^2 - 2m - 3 \leq 0 \\ (m+1)(m-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2. \quad (1)$$

- Từ (1) & (2) suy ra $-1 \leq m \leq 0$ là điều kiện cần.

Điều kiện đủ: Với $-1 \leq m \leq 0$, lấy một điểm $M(\alpha, 0) \in AB$ (điều kiện $2 \leq \alpha \leq 4$), thay tọa độ của M vào hệ, ta được:

$$\begin{cases} \alpha^2 - 2(m+3)\alpha + m^2 + 6m + 5 \leq 0 \\ (\alpha - m - 2)(\alpha - m - 5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \leq \alpha \leq m+5 \\ m+2 \leq \alpha \leq m+5 \end{cases} \Leftrightarrow m+2 \leq \alpha \leq m+5. \quad (*)$$

Nhận xét rằng với:

$$\begin{cases} -1 \leq m \leq 0 \\ 2 \leq \alpha \leq 4 \end{cases}$$

thì (*) luôn đúng $\Leftrightarrow$ tọa độ điểm M thỏa mãn hệ.

Vậy, với $-1 \leq m \leq 0$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 17: Xác định các giá trị của m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} = m \\ y\sqrt{1-x^2} = 2m \end{cases} \quad (i)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử hệ có nghiệm (x_0, y_0) suy ra:

$$\begin{cases} |x_0| \leq 1 \\ |y_0| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{tồn tại hai góc } \alpha, \beta \left(\frac{\pi}{2} \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2} \right): \begin{cases} x_0 = \sin \alpha \\ y_0 = \sin \beta \end{cases}$$

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha \cdot \cos \beta = m \\ \sin \beta \cdot \cos \alpha = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = 3m \\ \sin(\alpha - \beta) = -m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |3m| \leq 1 \\ | -m | \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow |m| \leq \frac{1}{3}.$$

Vậy $|m| \leq \frac{1}{3}$ là điều kiện cần để hệ có nghiệm.

Điều kiện đủ: Với $|m| \leq \frac{1}{3}$, bằng phép đặt ẩn phụ:

$$\begin{cases} x = \sin \alpha \\ y = \sin \beta \end{cases}, \text{ với } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = 3m \\ \sin(\alpha - \beta) = -m \end{cases} \xrightarrow{|m| \leq \frac{1}{3}} \begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ \alpha - \beta = v_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{u_0 + v_0}{2} \\ \beta = \frac{u_0 - v_0}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Điều đó chứng tỏ hệ có nghiệm.

Vậy, $|m| \leq \frac{1}{3}$ hệ có nghiệm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm m để phương trình sau nghiệm đúng $\forall x \geq 1$:

$$\sqrt{x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3} = mx - 1.$$

Bài tập 2: Tìm m để phương trình sau nghiệm đúng $\forall x \in [0, 2]$:

$$\sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1 - m + (m+1)x - x^2}.$$

Bài tập 3: Tìm a, b để phương trình sau nghiệm đúng $\forall x$:

$$\sqrt{x^2 + a} - \sqrt{bx^2 + (b-1)x + 1} = 0.$$

Bài tập 4: Cho bất phương trình:

$$2|x^2 - 8x + 7| \leq m$$

a. Giải bất phương trình khi $m = 2$.

b. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in [3, 5]$.

Bài tập 5: Tìm a để mọi $x \in [-1, 1]$ luôn có:

$$|x^2 - 3ax^2 - 4| \leq 1.$$

Bài tập 6: Tìm a, b để mọi $x \in [-1, 1]$ luôn có:

$$|8x^4 + ax^2 + b| \leq 1.$$

Bài tập 7: Cho bất phương trình

$$m\sqrt{2x^2 + 7} < x + m.$$

a. Giải bất phương trình với $m = \frac{1}{2}$.

b. Xác định m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Bài tập 8: Tìm m để tập nghiệm của bất phương trình

$$\sqrt{x^2 + 2mx} > x + 1$$

chứa đoạn $[-1, \frac{1}{4}]$.

Bài tập 9: Tìm m để bất phương trình

$$-4\sqrt{(2+x)(4-x)} \leq x^2 - 2x + m - 18$$

nghiệm đúng với mọi $x \in [-2, 4]$.

Bài tập 10: Tìm m để bất phương trình

$$\sqrt{(4+x)(6-x)} \leq x^2 - 2x + m$$

nghiệm đúng với mọi $x \in [-4, 6]$.

Bài tập 11: Tìm m để bất phương trình

$$\sqrt{(3+x)(7-x)} \leq x^2 - 4x + m$$

nghiệm đúng với mọi $x \in [-3, 7]$.

Bài tập 12: Tìm a, b, c để mọi $x \in [-1, 1]$ luôn có:

$$\log_3 |4x^3 + ax^2 + bx + c| \leq 0.$$

Bài tập 13: Cho hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} (2^x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2 \\ 2^x - y + m = 0 \end{cases}$$

Xác định m để hệ nghiệm đúng với mọi $x \in [1, 4]$.

Bài tập 14: Cho hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 6m + 5 \leq 3^y \\ (x - 3^y - m - 2)(x - 3^y - m - 5) \leq 0 \end{cases}$$

Xác định m để tập nghiệm của hệ chứa đoạn $[2, 4]$ của trục hoành.

Bài tập 15: Tìm m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq 4 \\ y = 4mx^2 \end{cases}$$

Bài tập 16: Tìm m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 7x^2 + 4xy + 2y^2 \leq \frac{2m-1}{2m+5} \\ 5x^2 - 4xy + 2y^2 \geq 3 \end{cases}$$

Bài tập 17: Tìm m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 15x^2 - 11xy + 2y^2 = -7 \\ x < y \\ 2m^2x + 3my < 0 \end{cases}$$

GIẢI BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH HỆ QUẢ

I. PHƯƠNG PHÁP

Cho hai phương trình

$$f(x, m) = 0 \quad (1)$$

$$g(x, m) = 0 \quad (2)$$

Với yêu cầu "Tìm điều kiện của tham số (giả sử là m) để phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2) (nói cách khác "để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2)"), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Điều kiện cần

- Giải và tìm nghiệm $x = x_0$ của (1).
- Để phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2), trước hết cần $x = x_0$ cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$g(x_0, m) = 0 \Rightarrow m = m_0.$$

- Vậy $m = m_0$ chính là điều kiện cần.

Bước 2: Điều kiện đủ

- Với $m = m_0$

$$(1) \Leftrightarrow f(x, m_0) = 0 \Rightarrow \text{nghiệm của (1)}$$

$$(2) \Leftrightarrow g(x, m_0) = 0 \Rightarrow \text{nghiệm của (2)}$$

- Kết luận.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: (Đề 42): Cho hai phương trình:

$$\sin x + m \cdot \cos x = 1 \quad (1)$$

$$m \cdot \sin x + \cos x = m^2. \quad (2)$$

Tìm m để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

Giải

Điều kiện cần: Nhận xét rằng với mọi m (1) luôn có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Do đó để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2) trước hết cần $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = m^2 \Leftrightarrow m = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Đó chính là điều kiện cần của m .

Điều kiện đủ

- Với $m = 0$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \sin x = 1$$

$$(2) \Leftrightarrow \cos x = 0$$

suy ra mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

- Với $m = 1$, ta được:

$$(1), (2) \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1$$

suy ra mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

Vậy với $m = 0$ hoặc $m = 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Tồn tại những bài toán mà không thể chỉ ra được dạng nghiệm tường minh cho phương trình (1) khi đó ta cần đánh giá thông qua tính chất nghiệm của các phương trình lượng giác, thí dụ như phương trình $\sin x = m$ có nghiệm x_0 thì cũng nhận $\pi - x_0$ làm nghiệm, khi đó bằng cách thay vào (2) cả x_0 và $\pi - x_0$ vào (2) ta sẽ tìm được điều kiện cần cho tham số. Cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: Cho hai phương trình:

$$\cos(x + y) = a \quad (1)$$

$$\sin(x + y) = b. \quad (2)$$

Tìm a, b để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

Giải

Điều kiện cần: Nhận xét rằng nếu (x_0, y_0) là nghiệm của (1) thì $(-x_0, -y_0)$ cũng là nghiệm của (1), do đó để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của phương trình (2) trước hết cần (x_0, y_0) và $(-x_0, -y_0)$ cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$\begin{cases} \sin(x_0 + y_0) = b \\ \sin(-x_0 - y_0) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x_0 + y_0) = b \\ -\sin(x_0 + y_0) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ \sin(x_0 + y_0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ x_0 + y_0 = k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ \cos k\pi = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ |a| = 1 \end{cases}$$

Đó chính là điều kiện cần của a và b .

Điều kiện đủ

- Với $a = 1$ & $b = 0$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \cos(x + y) = 1$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin(x + y) = 0$$

suy ra mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

- Với $a = -1$ & $b = 0$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \cos(x + y) = -1$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin(x + y) = 0$$

suy ra mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

Vậy, với $a = 1$ & $b = 0$ hoặc $a = -1$ & $b = 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai phương trình:

$$2\cos 2x \cdot \cos x = 1 + \cos 2x + \cos 3x \quad (1)$$

$$4\cos^2 x - \cos 3x = m \cos x + (4-m)(1 + \cos 2x). \quad (2)$$

Tìm m để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

Bài tập 2: Cho hai phương trình:

$$\sin x \cdot \cos 2x = \sin 2x \cdot \cos 3x - \frac{1}{2} \sin 5x. \quad (1)$$

$$m \cdot \cos 2x + |m| \cdot \cos 4x + \cos 6x = 1. \quad (2)$$

Tìm m để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

Bài tập 3: Cho hai phương trình:

$$3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2\sin x \cdot \sin 2x. \quad (1)$$

$$m \cdot \cos 3x + (4-8m)\sin^2 x + (7m-4)\cos x + 8m-4 = 0. \quad (2)$$

Tìm m để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

BÀI TOÁN 4

GIẢI BÀI TOÁN

VỀ HAI PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

I. PHƯƠNG PHÁP

Cho hai phương trình

$$f(x, m) = 0 \quad (1)$$

$$g(x, m) = 0 \quad (2)$$

Với yêu cầu "Tìm điều kiện của tham số (giả sử là m) để hai phương trình tương đương", ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Điều kiện cần

- Giải và tìm nghiệm $x = x_0$ của (1).
- Để phương trình (1) & (2) tương đương, trước hết cần $x = x_0$ cũng là nghiệm của (2), tức là:
 $g(x_0, m) = 0 \Rightarrow m = m_0$.
- Vậy $m = m_0$ chính là điều kiện cần.

Bước 2: Điều kiện đủ

- Với $m = m_0$
(1) $\Leftrightarrow f(x, m_0) = 0 \Rightarrow$ nghiệm của (1)
(2) $\Leftrightarrow g(x, m_0) = 0 \Rightarrow$ nghiệm của (2)
- Kết luận.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm m để 2 phương trình sau tương đương:

$$9x^2 + 3^{x^2+1} - 4 = 0. \quad (1)$$

$$\ln m - 4 \ln 2^{x-2} + m \cdot 4^{x-1} = 1. \quad (2)$$

Giải

- Giải (1)

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$3^{2x^2} + 3 \cdot 3^{x^2} - 4 = 0. \quad (3)$$

Đặt $t = 3^{x^2}$, điều kiện $t \geq 1$.

Khi đó phương trình (3) có dạng:

$$t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -4 \end{cases} \Leftrightarrow 3^{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 0$ do đó (1) và (2) tương đương khi và chỉ khi (2) có đúng một nghiệm $x = 0$.

Điều kiện cần: Giả sử (2) có nghiệm là $x = 0$ suy ra

$$\begin{aligned} |m - 4| \cdot 2^{-2} + m \cdot 4^{-1} &= 1 \Leftrightarrow |m - 4| + m = 4 \Leftrightarrow |m - 4| = 4 - m \\ \Leftrightarrow m - 4 \leq 0 &\Leftrightarrow m \leq 4 \end{aligned}$$

Đó chính là điều kiện cần để 2 phương trình tương đương.

Điều kiện đủ: Giả sử $m \leq 4$, đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$. khi đó (2) có dạng:

$$(4 - m)t + mt^2 = 4 \Leftrightarrow mt^2 + (4 - m)t - 4 = 0. \quad (4)$$

▪ Với $m = 0$

$$(4) \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2^x = 1$$

$\Leftrightarrow x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Vậy $m = 0$ thì (1) và (2) tương đương.

▪ $0 \neq m \leq 4$

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{4}{m} \end{cases}$$

Vậy để (1) và (2) tương đương, thì:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -\frac{4}{m} = 1 \\ -\frac{4}{m} < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m > 0 \end{cases} \xleftrightarrow{0 \neq m \leq 4} \begin{cases} m = -4 \\ 0 < m \leq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy, với $0 \leq m \leq 4$ hoặc $m = -4$ thì (1) và (2) tương đương.

Ví dụ 2: Cho 2 phương trình:

$$(x + 5)(2 - x) = 3m\sqrt{x^2 + 3x + m - 1} \quad (1)$$

$$x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 16 = 0. \quad (2)$$

Tìm m để (1) và (2) tương đương

Giải

▪ Giải (2)

$$(2) \Leftrightarrow (x^2 + 3x)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 4)(x^2 + 3x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Điều kiện cần: Giả sử (1) và (2) tương đương $\Rightarrow x = 1$ là nghiệm của (1), khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 6 = 3m\sqrt{m+3} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4 = m^2(m+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^3 + 3m^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (m-1)(m^2 + 4m + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy $m = 1$ là điều kiện cần để (1) và (2) tương đương.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, khi đó (1) có dạng:

$$-x^2 - 3x + 10 = 3\sqrt{x^2 + 3x}. \quad (3)$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x}$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \text{ (l)} \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Tức là (1) và (2) tương đương.

Vậy, với $m = 1$ thì (1) và (2) tương đương.

Chú ý: Chúng ta đã thấy tồn tại những phương trình chứa căn thức mà tập nghiệm của nó là một khoảng, do đó một phương trình chứa căn thức có thể tương đương với một bất phương trình (hoặc có thể được phát biểu dưới dạng "nghiệm đúng với mọi $x \in D$ "). Chúng ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Cho phương trình và bất phương trình:

$$\sqrt{x-1+2m\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-1-2m\sqrt{x-2}} = 2 \quad (1)$$

$$|x^2 + 3x + 2| \leq x^2 + 2x + 5. \quad (2)$$

Tìm m để (1) và (2) tương đương

Giải.

▪ Giải (2)

$$(2) \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)^2 \leq (x^2 + 2x + 5)^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(2x^2 + 5x + 7) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Điều kiện cần: Giả sử (1) và (2) tương đương $\Rightarrow x = 3$ là nghiệm của (1), khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2+2m} + \sqrt{2-2m} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4-4m^2} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Vậy $m = \pm 1$ là điều kiện cần để (1) và (2) tương đương.

Điều kiện đủ

▪ Với $m = 1$, khi đó (1) có dạng:

$$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-2} + 1| + |\sqrt{x-2} - 1| = 2$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-2} + 1| + |1 - \sqrt{x-2}| = (|\sqrt{x-2} + 1| + (1 - \sqrt{x-2}))$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-2} + 1)(1 - \sqrt{x-2}) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - (x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Tức là (1) và (2) tương đương.

- Với $m = -1$, tương tự (hoặc có thể nhận xét về tính đối xứng của m trong phương trình).

Vậy, với $m = \pm 1$ thì (1) và (2) tương đương.

Ví dụ 4: (Đề 10): Tìm m để hai phương trình sau tương đương:

$$\sin x \cdot \cos 2x = \sin 2x \cdot \cos 3x - \frac{1}{2} \sin 5x. \quad (1)$$

$$m \cdot \cos 2x + |m| \cdot \cos 4x + \cos 6x = 1. \quad (2)$$

Giải

Điều kiện cần

Giải (1): Ta được:

$$\frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x) - \frac{1}{2} \sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Do đó (1) & (2) tương đương trước hết cần $x = 0$ (là một nghiệm của họ $x = \frac{k\pi}{3}$) cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$m \cdot \cos 0 + |m| \cdot \cos 0 + \cos 0 = 1 \Leftrightarrow m + |m| = 0 \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Đó chính là điều kiện cần của a và b .

Điều kiện đủ

- Với $m = 0$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow \cos 6x = 1 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 3x = 1 \Leftrightarrow \sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy $m = 0$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

- Với $m < 0$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow m \cdot \cos 2x - m \cdot \cos 4x + \cos 6x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x - 1 - m(\cos 4x - \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 3x + 2m\sin 3x \cdot \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin 3x - m\sin x)\sin 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ 3\sin x - 4\sin^3 x - m \cdot \sin x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = k\pi \\ 4\sin^2 x - m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ \sin^2 x = \frac{3-m}{4} \end{cases} \quad (3)$$

Từ đó để (2) chỉ có nghiệm $x = \frac{k\pi}{3}$, thì điều kiện là (3) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3-m}{4} < 0 \\ \frac{3-m}{4} > 1 \end{cases} \stackrel{m < 0}{\Leftrightarrow} \frac{3-m}{4} < 1 \Leftrightarrow m < -1.$$

Vậy, với $m = 0$ hoặc $m < -1$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm giá trị của m để hai phương trình tương đương.

$$\cos 2x + \sin x - 1 = 0$$

$$m\sin 3x + (m-2)\cos 2x - (m+2)\sin x + 2 - m = 0$$

Bài tập 2: Tìm giá trị của m để hai phương trình tương đương.

$$2\cos x \cdot \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

$$4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x + (4-a)(1 + \cos 2x)$$

Bài tập 3: Tìm giá trị của m để hai phương trình tương đương.

$$\cos 3x = 4\cos(3\pi + x)$$

$$m\cos^2 x + (1-m)\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$$

Bài tập 4: Xác định a, b để hai phương trình sau tương đương:

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cdot \cos 2x$$

$$\sin 3x = a\sin x + (4-2a)\sin^2 x.$$

Bài tập 5: Xác định a, b để hai phương trình sau tương đương:

$$a\sin 2x - 2\sqrt{3} = a\sqrt{3}\cos x - 4\sin x$$

$$\sin 2x + \cos 2x + b\sqrt{2} + 1 = \sqrt{2}\sin x + 2\cos x(\cos x + b)$$

Bài tập 6: Tìm m để phương trình:

$$|x - m| - |x + 1| = 2$$

tương đương với bất phương trình $\sqrt{x^2 + 4x + 3} + x + 1 \geq 0$.

Bài tập 7: (Đề 10): Tìm m để hai phương trình sau tương đương:

$$2\cos 2x \cdot \cos x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

$$4\cos^2 x - \cos 3x = m\cos x + (4-m)(1 + \cos 2x).$$

Bài tập 8: (Đề 40): Tìm m để hai phương trình sau tương đương:

$$3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2\sin x \cdot \sin 2x$$

$$m \cdot \cos 3x + (4-8m)\sin^2 x + (7m-4)\cos x + 8m - 4 = 0.$$

Bài tập 9: (Đề 117): Tìm a, b để hai phương trình sau tương đương:

$$a \cdot \sin 2x + \sqrt{2} = 2 \cos x + a \sqrt{2} \sin x$$

$$2 \sin^2 x + \cos 2x + \sin 2x + b = 2b \sin x + \cos x + 1.$$

CHỦ ĐỀ 3

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ GIẢI BÀI TOÁN VỀ TÍNH CHẤT THAM SỐ

Trong chủ đề này sẽ minh họa cách sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ giải bài toán về tính chất của tham số, nó được chia thành hai dạng:

Dạng 1: Phương trình nghiệm đúng với giá trị xác định của tham số.

Dạng 2: Hệ nghiệm đúng với giá trị xác định của tham số.

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM ĐÚNG VỚI
GIÁ TRỊ XÁC ĐỊNH CỦA THAM SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

Với yêu cầu:

"Tìm x để phương trình có nghiệm với mọi giá trị của tham số m thuộc D_m "

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để các biểu thức của phương trình có nghĩa.

Bước 2: Điều kiện cần: Giả sử phương trình nghiệm đúng với $\forall m \in D_m$ suy ra nó nghiệm đúng với $m_0 \in D_m$.

▪ Giải phương trình với $m = m_0 \Rightarrow$ giá trị của ẩn x_0 .

Bước 3: Điều kiện đủ: Thực hiện phép kiểm tra với $x = x_0$.

Chú ý: Việc chỉ ra giá trị $m_0 \in D_m$ được gọi là phương pháp sử dụng điểm thuận lợi trong việc tìm điều kiện cần và:

- Hoàn toàn có thể sử dụng một hoặc nhiều điểm thuận lợi $m_0, m_1, \dots$ trong việc xác định điều kiện cần.
- Với câu hỏi "Nên lấy những giá trị nào từ tập D_m để làm điểm thuận lợi" chỉ có thể trả lời rằng cần sử dụng trực giác và kinh nghiệm của từng người. Các em học sinh cần tích lũy dần những kinh nghiệm này thông qua các ví dụ.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm x để phương trình sau nghiệm đúng với mọi a :

$$\log_{a^2+2}(\sqrt{x+3}-1) = \log_{a^2x^2+2}(2-\sqrt{x}). \quad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) nghiệm đúng với mọi $a \Rightarrow$ đúng với $a = 0$.

Với $a = 0$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x+3}-1) = \log_2(2-\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}-1 = 2-\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x+3+x+2\sqrt{x(x+3)} = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x(x+3)} = 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x(x+3) = (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $x = 1$ là điều kiện cần để phương trình nghiệm đúng với mọi a .

Điều kiện đủ: Với $x = 1$, phương trình (1) có dạng:

$$\log_{a^2+2}(\sqrt{1+3}-1) = \log_{a^2+2}(2-\sqrt{1})$$

$$\Leftrightarrow \log_{a^2+2} 1 = \log_{a^2+2} 1 \text{ luôn đúng}$$

Vậy, $x = 1$ là điều kiện cần và đủ để phương trình nghiệm đúng với mọi a .

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$\log_2(mx^3 - 5mx^2 + \sqrt{6-x}) = \log_{2+m}(3 - \sqrt{x-1}).$$

a. Giải phương trình với $m = 0$.

b. Tìm các giá trị của x nghiệm đúng phương trình đã cho với mọi $m \geq 0$.

Giải

a. Với $m = 0$ phương trình có dạng:

$$\log_2 \sqrt{6-x} = \log_2(3 - \sqrt{x-1}). \quad (2)$$

Điều kiện:

$$\begin{cases} 6-x > 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 3-\sqrt{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 6.$$

Biến đổi (2) về dạng:

$$\begin{aligned} \sqrt{6-x} &= 3 - \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{6-x} + \sqrt{x-1} = 3 \\ \Leftrightarrow (6-x) + (x-1) + 2\sqrt{(6-x)(x-1)} &= 9 \Leftrightarrow \sqrt{(6-x)(x-1)} = 2 \\ \Leftrightarrow (6-x)(x-1) &= 4 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

b. Sử dụng điều kiện cần và đủ để thực hiện.

Điều kiện cần: Phương trình nghiệm đúng với $\forall m \geq 0$, trước hết nghiệm đúng với $m = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

Điều kiện đủ:

▪ Với $x = 2$, phương trình (1) có dạng:

$$\log_2(2 - 12m) = \log_{2+m}(3 - 1) \Leftrightarrow \log_2(2 - 12m) = \log_{2+m} 2,$$

phương trình này không thể nghiệm đúng với mọi $m \geq 0$, bởi với $m = 2$ mâu thuẫn.

- Với $x = 5$, phương trình (1) có dạng:

$$\log_2 1 = \log_{2+m} 1 \text{ (luôn đúng)}.$$

Vậy, $x = 5$ nghiệm đúng phương trình đã cho với mọi $m \geq 0$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho phương trình

$$2 \log_{a^2+2} (4 - \sqrt{7+2x}) = \log_{a^2x^2+2} (4-3x).$$

- Giải phương trình với $a = 0$.
- Tìm các giá trị của x nghiệm đúng phương trình đã cho với mọi $m \geq 0$.

Bài tập 2: Cho phương trình

$$\log_2 (a^2x^2 + 5a^2x + \sqrt{6-x}) = \log_{a^2+2} (3 - \sqrt{x-1}).$$

- Giải phương trình với $a = 0$.
- Tìm các giá trị của x nghiệm đúng phương trình đã cho với mọi $m \geq 0$.

BÀI TOÁN 2

HỆ NGHIỆM ĐÚNG VỚI GIÁ TRỊ XÁC ĐỊNH CỦA THAM SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

Cho hệ chứa hai tham số a, b , với yêu cầu:

"Tìm a để hệ có nghiệm với mọi b thuộc D_b "

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để các biểu thức của hệ có nghĩa.

Bước 2: Điều kiện cần: Giả sử hệ nghiệm đúng với $\forall b \in D_m$ suy ra nó nghiệm đúng với $b_0 \in D_m$.

- Giải hệ với $b = b_0 \Rightarrow$ giá trị của a_0 .

Bước 3: Điều kiện đủ: Thực hiện phép kiểm tra với $a = a_0$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm với mọi b :

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2 \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện cần:

Do hệ có nghiệm với $\forall b$, nên phải có nghiệm khi $b = 0$. Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a = 1 \\ a + x^2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ x = 0 \\ a + x^2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Vậy điều kiện cần là $a = 0$ hoặc $a = 1$

Điều kiện đủ

- Với $a = 0$ hệ có dạng:

$$\begin{cases} (b^2 + 1)^y = 1 & (1) \\ bxy + x^2y = 1 & (2) \end{cases}$$

Hệ trên không thể có nghiệm với mọi b , bởi khi $b \neq 0$

$$(1) \Rightarrow y = 0$$

Nghiem này không thỏa mãn (2), do vậy hệ vô nghiệm.

- Với $a = 1$ hệ có dạng:

$$\begin{cases} x^2 + (b^2 + 1)y = 1 \\ bxy + x^2y = 0 \end{cases},$$

hệ luôn có nghiệm $x = y = 0$ với mọi b .

Vậy, với $a = 1$ hệ có nghiệm với mọi b .

Ví dụ 2: Xác định các giá trị của a sao cho hệ sau đây có nghiệm với mọi b

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2b^2 - 1} - \sqrt{(a-1)by} = x - 1 \\ ax + by - 1 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Điều kiện cần: Hệ có nghiệm với mọi $b \Rightarrow$ có nghiệm với $b = 0$, khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} = x - 1 \\ ax - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ax - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ a = 1 \end{cases}.$$

Vậy $a = 1$ là điều kiện cần để hệ có nghiệm với mọi b .

Điều kiện đủ: Với $a = 1$, hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2b^2 - 1} = x - 1 \\ x + by - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 2b^2 - 1 = (x - 1)^2 \\ x + by - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b^2 + 1 \\ x + by - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = b^2 + 1 \\ b^2 + by = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ít nhất một nghiệm là } \begin{cases} x = b^2 + 1 \\ y = -b \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm với mọi b khi $a = 1$.

Ví dụ 3: Tìm a để hệ sau có nghiệm với mọi b :

$$\begin{cases} 2^{b \log_3 x} + b(a+1) \log_2^2 y = a^2 \\ (a-1) \log_3^2 x + \log_2^2 y = 1 \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Điều kiện cần: Hệ có nghiệm với $\forall b \Rightarrow$ có nghiệm với $b = 0$, khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a^2 \\ (a-1) \log_3^2 x + \log_2^2 y = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \pm 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ nghiệm với $\forall b$.

Điều kiện đủ

- Với $a = 1$, khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2^{b \log_3 x} + 2b \log_2^2 y = 1 \\ \log_2^2 y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{b \log_3 x} + 2b = 1 \\ \log_2^2 y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{b \log_3 x} = 1 - 2b \\ \log_2^2 y = 1 \end{cases}$$

Nhận xét rằng hệ trên chỉ có nghiệm khi $1 - 2b > 0 \Leftrightarrow b < \frac{1}{2}$.

Vậy $a = 1$ không thỏa mãn.

- Với $a = -1$, khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2^{b \log_3 x} = 1 \\ -2 \log_3^2 x + \log_2^2 y = 1 \end{cases}$$

Nhận xét rằng hệ trên luôn nhận $x = 1$ & $y = 2$ làm nghiệm.

Vậy với $a = -1$ hệ có nghiệm với mọi b .

Ví dụ 4: Với $a > 0$, cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = b^2 - b + 1 \\ a^x + a^y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tìm a để hệ có nghiệm với mọi $b \in [0, 1]$.

Giải

Biến đổi tương đương hệ về dạng:

$$\begin{cases} a^{x+y} = a^{b^2-b+1} \\ a^x + a^y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^x \cdot a^y = a^{b^2-b+1} \\ a^x + a^y = \frac{1}{2} \end{cases},$$

Khi đó a^x, a^y là nghiệm dương của phương trình:

$$t^2 - \frac{1}{2}t + a^{b^2-b+1} = 0. \quad (1)$$

Điều kiện cần: Hệ có nghiệm với $\forall b \in [0, 1]$

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm dương $\forall b \in [0, 1]$

$\Rightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm dương với $b = 1$ và $b = \frac{1}{2}$.

- Với $b = 1$, theo a) ta có điều kiện là $0 < a \leq \frac{1}{16}$. (5)

- Với $b = \frac{1}{2}$, điều kiện là phương trình

$$t^2 - \frac{1}{2}t + a^{\frac{3}{4}} = 0. \quad (6)$$

hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} - 4a^{\frac{3}{4}} \geq 0 \\ \frac{1}{2} > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a \leq \frac{1}{32\sqrt{2}}. \quad (7)$$

Từ (5) và (7), ta được $0 < a \leq \frac{1}{32\sqrt[3]{2}}$.

Đó chính là điều kiện cần để hệ nghiệm với $\forall b \in [0, 1]$.

Điều kiện đủ: Giả sử $0 < a \leq \frac{1}{32\sqrt[3]{2}}$, khi đó xét (1) ta có:

Với $\forall b \in [0, 1]$

$$\frac{3}{4} \leq b^2 - b + 1 \leq 1 \xleftarrow{0 < a \leq \frac{1}{32\sqrt[3]{2}}} a \leq a^{b^2-b+1} \leq a^{\frac{3}{4}}$$

$$\xleftarrow{0 < a \leq \frac{1}{32\sqrt[3]{2}}} a^{b^2-b+1} \leq \left(\frac{1}{32\sqrt[3]{2}}\right)^{3/4} \Leftrightarrow 4a^{b^2-b+1} \leq 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} - 4a^{b^2-b+1} \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \geq 0. \quad (8)$$

$$S = \frac{1}{2} > 0. \quad (9)$$

$$P = a^{b^2-b+1} > 0. \quad (10)$$

Từ (8), (9), (10) suy ra (1) luôn có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow$ hệ có nghiệm.

Vậy, với $0 < a \leq \frac{1}{32\sqrt[3]{2}}$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Có thể sử dụng phương pháp khác để thực hiện yêu cầu trên, cụ thể:

Hệ có nghiệm với mọi $b \in [0, 1]$

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm dương với $\forall b \in [0, 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0, \forall b \in [0, 1] \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} - 4a^{b^2-b+1} \geq 0 \\ \frac{1}{2} > 0 \\ a^{b^2-b+1} > 0 \end{cases}, \forall b \in [0, 1]$$

$$\Leftrightarrow a^{b^2-b+1} \leq \frac{1}{16}, \forall b \in [0, 1]. \quad (3)$$

Hệ có nghiệm với: $\forall b \in [0, 1]$

$\Rightarrow$ có nghiệm với $b = 1$

$\Rightarrow$ (theo a) $0 < a \leq \frac{1}{16}$, đó là điều kiện cần của a.

Với điều kiện trên, lấy logarit cơ số a hai vế của (3), ta được:

$$b^2 - b + (1 + \log_a 16) \geq 0, \forall b \in [0, 1]. \quad (4)$$

Xét hàm số $y = b^2 - b + (1 + \log_a 16)$

▪ Miền xác định $D = [0, 1]$.

▪ Đạo hàm:

$$y' = 2b - 1,$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}.$$

▪ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
y'			-	0	+
y				$\frac{3}{4} + \log_a 16$	

Vậy, (4) đúng với $\forall b \in [0, 1]$

$$\Leftrightarrow y_{\min} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} + \log_a 16 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{32\sqrt[3]{2}}.$$

Kết hợp với điều kiện $0 < a \leq \frac{1}{16}$, ta được: $0 < a \leq \frac{1}{32\sqrt[3]{2}}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2 \\ (a-1)x^3 + y^2 = 1 \end{cases}$$

a. Giải hệ với $a = b = 1$.

b. Tìm a để hệ sau có nghiệm với mọi b.

Bài tập 2: Xác định các giá trị của a sao cho hệ sau có nghiệm với mọi b:

$$\begin{cases} a(x^2 + y^2) + x + y = b \\ y - x = b \end{cases}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Trần Văn Hạo (chủ biên) - Chuyên đề luyện thi vào Đại học Đại số - Nhà xuất bản Giáo dục - 2001.
2. Nguyễn Văn Mậu - Phương pháp giải phương trình và bất phương trình - Nhà xuất bản Giáo dục - 2001.
3. Phan Huy Khải - Phương pháp điều kiện cần và đủ để biện luận hệ có tham số - Nhà xuất bản Giáo dục - 2001.
4. Nguyễn Đức Đồng & Nguyễn Văn Vĩnh - 15 phương pháp chuyên đề tam thức bậc 2 và các ứng dụng đặc sắc - Nhà xuất bản Trẻ - 2000.
5. Trần Phương - Lê Hồng Đức. Đại số sơ cấp . Nhà xuất bản Hà Nội - 2003.

LỜI CUỐI

Nhóm Cựu Môn luôn sẵn lòng giải đáp mọi thắc mắc của các em học sinh và độc giả về nội dung của cuốn tài liệu này.

Mọi chi tiết xin liên hệ trực tiếp tới:

Ths. Lê Hồng Đức

Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Tây Hồ - Hà Nội.

Điện thoại: 04 7196671.

Phương pháp đặc biệt giải toán THPT SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ GIẢI TOÁN

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám đốc NGUYỄN KHÁC OÁNH

Biên tập nội dung:

LÊ BÍCH NGỌC

Trình bày bìa:

LÊ BÍCH NGỌC

Chế bản:

LÊ HỮU TRÍ